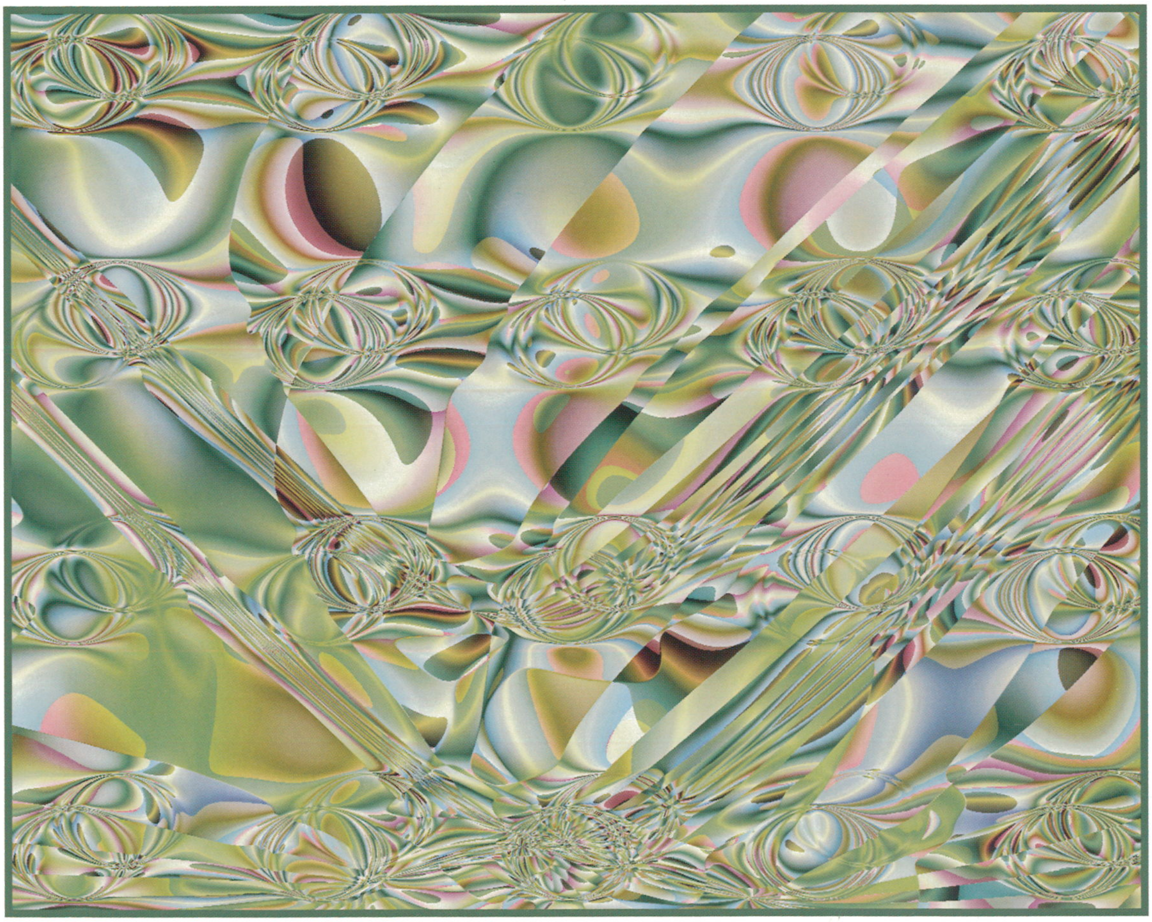
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年9月1日発行　第49巻9号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

9
2011

特集 オイラー
18世紀最大の数学者に迫る



No.579

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-83：for Senior & Graduate Courses）

共形場理論

現代数理物理の基礎として

伊藤　克司　著

本体 2238 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

理論物理の基礎としての確固たる位置を占め，豊富な内容を持つに至った 2 次元の共形場理論を基礎的な事項に絞って解説.

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 579 September 2011

オイラー

18世紀最大の数学者に迫る

《特 集》

《書 評》

《「数理科学」は語る》

《リレー連載》

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2008年/11 省略
2008年/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界

数理科学臨時別冊一覧

10年/6 非線形現象と微分方程式
10年/7 数物系のための圏論
10年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎
11年/1 超弦理論の基礎
11年/3 繰りこみ群の物理と数理
11年/4 超重力理論
11年/6 共形場理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

September 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 579

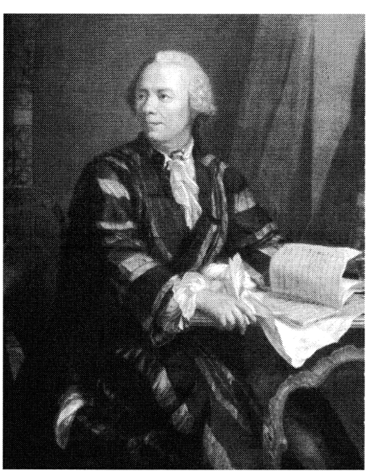
特集／オイラー

巻頭言

木 村　達 雄

オイラーは，1707年にスイスのバーゼルで生れた18世紀最大の数学者です．殆ど何もないところから数学を生み出すその独創性と，研究の量のすさまじさでは，人類史上最大とも言えるでしょう．研究論文は数学以外にも物理，天文学，その他にまでおよび，1911年から始まったオイラー全集の刊行もまだ完結できないほどものすごい数の論文があるのです．

佐藤超関数などの独創的な理論で知られる佐藤幹夫先生は，オイラーの数学について「なぜオイラーに惹かれるか一言では言えないけれど，オイラーは数学の殆どあらゆる分野にわたって，一番本質的なところをつかんでみせている．この点は



レオンハルト・オイラー（1707–1783）．

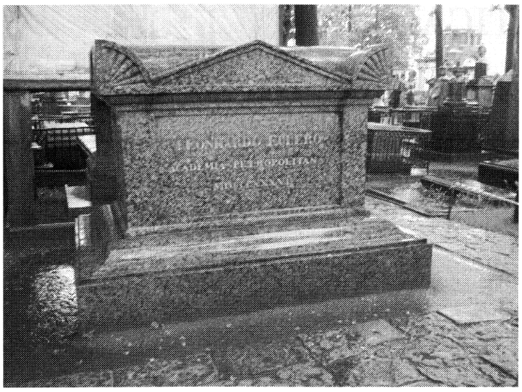
偉い数学者がたくさんいる中でも，ちょっとほかにいないのではないか．オイラーは学問の体系を作るというよりも，学問のもとを作っている原鉱みたいなものを次々掘り出して見せた．そういうものが本当の学問のもとを作っているんだと私は思います」と話されています．

オイラーは論文の他に著書も多いのですが，ガウスは「オイラーの著作を勉強するのは，数学のさまざまな領域における最良の訓練であって，ほかの何事にも代えがたい」と言い，ラプラスは「オイラーを読め，オイラーを読め，彼は我々すべての師匠なのだ」とすら言っています．

これだけの仕事をする人の意識というか頭の中は一体どうなっていたのでしょう．きっと何を見ても深く観察して，何でそうなんだろうといつも考えている．寝ても覚めても，これで良いのだろうか，どう発展できるのだろうと物事の最初のところから疑問を感じて絶えず考え続けているのでしょう．オイラーは天才にしては穏やかで円満，人と集まるのも好きな人で好奇心も凄く旺盛．色々な人と話しているところからも，その発想に刺激を与えられたようです．

さて今回はこのような魅力あふれるオイラーについての特集です．

最初はオイラーに関する著作もある黒川信重先生による「オイラー入門」で，オイラーの仕事を“根



サンクトペテルブルクにあるオイラーの墓.

本物への分解表示”という思想によって例をとって概観されています．オイラーの色々な仕事がこの視点でみると関連してみえるのが面白いです．

次の「オイラーとゼータ関数のルーツ」はゼータ関数の研究者である佐藤文広先生によるもので，オイラーが発見した平方数の逆数 $1/n^2$ の和が $\pi^2/6$，あるいはすべての素数 $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ について $p^2/(p^2 - 1)$ を掛け合わせれば何と $\pi^2/6$ になるという不思議な結果の解説も含んでいます．

そして数学史を専門とし『オイラーの無限解析』など多くの訳書でも知られる高瀬正仁先生による「オイラーの無限解析　関数概念の発生と無限解析の変容」です．当時の数学の様子とオイラーの役割を解説されています．

「オイラーと複素関数論」は多変数複素解析学などを研究されている野口潤次郎先生によるものです．オイラーは独立変数として複素数と使うという考えを導入しましたが，その後の複素関数論の発展を古事記や言語と創造性の話を交えながら書かれている興味深い話です．数学の定理で初学者には難しそうなことも少し書かれていますが，そこは絵画を楽しむように見られたら良いと思います．

佐藤肇先生による「オイラーと位相幾何，組合せ理論　量に依らない幾何学の始まり」では，ケーニヒスベルグ７つの橋，多面体公式，魔法陣の３つについてオイラーの有名な仕事とその後の発展について紹介されています．

和田純夫先生の「オイラーと古典力学」では，18世紀の力学の発展の中でオイラーが果たした役割について紹介されています．

高木隆司先生の「オイラーとニュートンと流体力学」では古典力学のうちの流体力学，とくにオイラーの方程式に焦点をあてておられます．

コラムでは足立恒雄先生による「オイラーの著書を紐解く」がありオイラーの著書のいくつかが紹介されています．

もう一つのコラム「階乗の拡張の夢」では，オイラーが $n!$ を自然数 n でない場合に初めて拡張したときの，想像上のお話を気楽に読めるものとして書きました．

最後に忙しい中を原稿を書いて下さった諸先生方に心から感謝いたしますとともに，このオイラーの特集が読者のオイラーに対する興味，さらに数学，物理などに対する興味を引き起こしてくれることを願って巻頭言とします．

参考文献

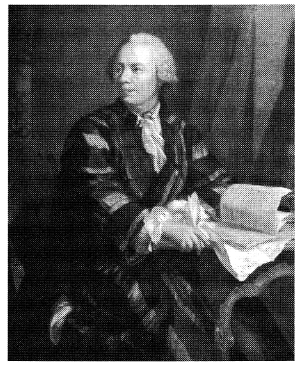
1) 佐藤幹夫，オイラーの数学，「数学セミナー」1983 年 11 月号（木村達雄編，『佐藤幹夫の数学』（日本評論社）に再録）．

2) オイラー著，高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』，海鳴社．

3) フェルマン著，山本敦之訳『オイラー—その生涯と業績』，シュプリンガー・ジャパン．

（きむら・たつお，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

オイラー入門



黒川 信重

1. オイラーへの旅

オイラー（1707–1783）は史上最大の数学者，と考えます．全集は百巻に近づこうという膨大な量であり，しかも，出版が完結したわけではないのです．各巻が大型版の500ページ程はある全集を見ていると，とても一人の人間の業とは思えません．その内訳も，はじめの30巻強（第Iシリーズ）の数学につづいて，物理学・天文学・音楽等々，学問全般に渡るという幅広さです．

今回のオイラー特集は，各分野のエキスパートの方々がオイラーの仕事の解説をされてますので，それに加えて「オイラー入門」という文章を付けることに意味があるとしますと，単純な視点から思い付いた一，二の事をメモしておいて，読者の参考に供するということくらいになるでしょう．これは，オイラーの全体像への案内では，無論ありません．私はオイラーの数論を眺めた程度のオイラーファンですので，その意味合いで読んでください．

オイラーはスイスのバーゼル近郊の生れですが20歳になる1727年には北へはるかな旅を行い，ロシアのサンクトペテルブルクに白夜の5月に到着しました．結局，オイラーは生涯の大部分をサンクトペテルブルクに送り，現在もそこの寺院に眠っています．赤い美しい墓石です．

オイラーは数学に世界から，どこまでも旅をしました．どこに行こうとしていたのかは定かでありません．オイラーの書き遺したものはほとんど全集にて見ることができると考えてよさそうです．ただし，サンクトペテルブルクにあるオイラーの原稿を調べたマニン教授によれば，数学関係だけでも数千ページが未出版とのことです．

オイラーの誕生日は4月15日です．日本では桜の花の美しい時期に当たっています．今年も，ちょうどその頃に，三春の滝桜（福島県）が満開を迎えたとのうれしい便りが届きました．美事な枝垂(しだ)れ桜です．3月11日に起ったマグニチュード9.0の巨大地震と大津波および福島原子力発電所（核燃料）爆発という困難な状況下での，明るいニュースでした．三春の滝桜は千年の長きにわたって生き続けてきたと言われています．人間の動きはどのように見えていたのでしょうか．40キロほど東にある福島原発が40年前に動きだしたことは，ごく最近のことなのでしょう．三春の滝桜は「ずーっと先の事までよく考えなさい」と語りかけているのでしょう．少なくとも千年先くらいは．

オイラーの仕事は，『滝桜』のイメージがぴったり，とは別の機会に書いたことがあります．オイラーから発する美しい数学の流れの見事さは言葉に尽し難いものです．

オイラーの書いたものについては『オイラー全集』(Birkhäuser刊)および「オイラー・アーカイブ」(http://www.math.dartmouth.edu/~euler/) が充実していて，原文に当たることができます．前

者は大きな図書館等にしかないかも知れませんが，後者は検索すれば無料で読むことができて便利です．また，2007年のオイラー生誕300周年前後に出版の次の二冊も参照していただけると幸いです：

黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店，2006年．

黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と12連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007年．

2. 根本物への分解表示という思想

オイラーの仕事を見ていて強く印象を受けることは「根本物への分解表示」の願望です．「根本物への分解表示」という考えは2500年昔のギリシア時代の「素因数分解」（素数論）や「原子（アトム）への分解」（原子論）から明確に見ることができます．この思想は，オイラーにおいて見事に開花したと言えるでしょう．

年代順にいくつか挙げてみましょう．

(1) 分解関数（階乗関数）$[n]=1\times2\times\cdots\times n=n!$ の研究
[1729年，22歳；全集I-14巻，1–24頁]

(2) “フェルマー素数” の分解：$2^{32}+1=641\times 6700417$
[1732年，25歳；全集I-2巻，1–5頁]

(3) 三角関数の分解：
$\sin(x)=x\times(x^2-\pi^2)\times(x^2-4\pi^2)\times(x^2-9\pi^2)\times\cdots$
[1735年，28歳；全集I-14巻，73–86頁，142–144頁]

(4) ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ の分解：$\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}$
[1737年，30歳；全集I-14巻，230頁]

(5) ゼータ関数の更なる分解：
$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}\times(s+2)\times(s+4)\times\cdots$
[1749年，42歳；全集I-15巻，72頁]．

少しずつ解説をつけましょう．

● (1) はオイラーの本格的な数学者としてのデビュー作と言って良いものです．いわゆる「ガンマ関数」の発見です．オイラーは，現在使われているような記号 $\Gamma(x)$ を用いてはいません．後期の論文で，記号 $[x]$ を

$$[x]=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^x dt$$

として導入しました（たとえば，(5) の論文で使っています）．これは，階乗

$$n!=1\times2\times\cdots\times n$$

を自然数 n だけでなく，より一般の変数に拡張しようという研究です．オイラーは定積分

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^n dt=n!$$

に気付き，一般化した分解関数 $[x]$ に至りました．この積分 $[x]$ は（たとえば $x>0$ のときに），部分積分を用いて

$$\begin{aligned}[x]&=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^x dt\\&=\left[t\cdot\left(\log\frac{1}{t}\right)^x\right]_0^1\\&\quad-\int_0^1 t\cdot x\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)dt\\&=x[x-1]\end{aligned}$$

という漸化式をみたすことがわかります．したがって，初期値

$$[0]=\int_0^1 dt=1$$

から，$[n]=n!$ が確認できます．

ちなみに，$n!$ を「階乗関数」と言う面白い日本語訳は，むしろ，英語の factorial (factorial function) をそのまま「分解関数」と訳しておけば良かったのに，と思うのです．オイラーがデビュー作から「因数分解」への強い志向を持っていたことが自然に納得できたはずです．

このようにして，自然に（オイラーの手になると何事も自然に動いて行くのです：不思議です）分解関数 $[x](=“x!”)$ を得ます．オイラーは

$$\left[\frac{1}{2}\right]=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

などにも注意していますし，後の機会（(5) の論文のときなど）には，関数等式

$$[x][-x]=\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$$

(「オイラーの反転公式」とも呼ばれます）を得ています．

この等式は，分解表示

$$[x]=e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right\}$$

（ここで，$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ はオイラー定数）を用いて見通しますと，

$$[x][-x]=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}=\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$$

を意味しています．右辺については (3) も見てください．オイラーの分解表示法は物事をすっきりと見せてくれます．

オイラーは，さらには，ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{[s-1]}\int_0^1\frac{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}}{1-t}dt$$

を与えています（1769 年，62 歳；全集 I-15 巻，112 頁）．この積分表示は，約百年後のリーマンがゼータ関数の解析接続を行う際の出発点となりました．念のために，計算を見ておきますと，

$$\int_0^1\frac{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}}{1-t}dt=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}t^{n-1}dt$$

において

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}t^{n-1}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{1}{n}du$$

［$t^n=u$ と置き換え］

$$=n^{-s}\int_0^1\left(\log\frac{1}{u}\right)^{s-1}du$$
$$=n^{-s}[s-1]$$

となることから

$$\int_0^1\frac{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{s-1}}{1-t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}[s-1]$$
$$=[s-1]\zeta(s)$$

とわかります．実にスムーズです．オイラーは，このように $\int_0^1$ という積分を用いています．現在では，積分変数 t を $t=e^{-u}$ と置きかえた積分

$$[x]=\int_0^{\infty}e^{-u}u^x du$$

となっています．さらに，現在では，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ という記号になって，しかも $[x]$ とは“1 ずらして”，用いられています：

$$\Gamma(x)\,(=[x-1]=\text{“}(x-1)!\text{”})$$
$$=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{x-1}du.$$

このときの漸化式は

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

で，自然数 n に対して

$$\Gamma(n+1)=n!$$

ということになります．（オイラーの原型の方が自然ですが．）反転公式は

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

となります．また，ゼータ関数の積分表示は

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{u^{s-1}}{e^u-1}du$$

という形です．

なお，オイラーの分解関数への愛は連分数展開にも見えます（図 1，1755 年，48 歳；全集 I-14 巻，606 頁）．このように長い連分数はオイラーの原文表記通りですので雰囲気を味わってください．この論文には

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[n]\;=\;1-1+2-6+24-120+\text{etc.}$$
$$=\;0.5963473621372\cdots$$

という驚くべき数値計算も残されています（同 611 頁：ヒントは連分数展開表示（図 1）で $x=1$ と

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[n]x^n \\
&= 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} \\
&= \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}} .
\end{aligned}
$$

図 1

してみることです）.

さて，オイラーの初期の話が長くなってしまいました（オイラーの全集の迷宮に埋れているうちに，思いのほか時間が経って，いつの間にか夕方になってしまいました）ので，後は簡単にすませましょう．

● (2) はフェルマー素数の問題です．フェルマーは

$$
2^{2^n}+1 = \begin{cases} 3 & \cdots \quad n=0 \\ 5 & \cdots \quad n=1 \\ 17 & \cdots \quad n=2 \\ 257 & \cdots \quad n=3 \\ 65537 & \cdots \quad n=4 \end{cases}
$$

が素数になることを発見し，$n=5$ に対する

$$2^{32}+1 = 4294967297$$

も素数だろうと予想したのです．オイラーは

$$4294967297 = 641 \times 6700417$$

という素因数分解表示を行って，フェルマーのこの予想を否定しました．$2^{2^n}+1$ の形の素数（2^m+1 の形の素数と言っても本質的には同じことです：自動的に $m=2^n$ の形になってしまいますので——$m=0$ の場合を除けば——）は「フェルマー素数」と呼ばれていますが，現在でも，フェルマーの発見した 5 個しか見つかっていません．本当なら「どんどん見つかって，無限個存在するのではないか…」と期待させてくれるとうれしいのですが（メルセンヌ素数と呼ばれる 2^m-1 の形の素数の場合には順調に 47 個見つかっていて——今のところ 2 年に 1 個くらい出てくる状態ですが，2009 年に 1 個見つかって以来出ていないのでちょっと心配——きっと無限個存在する，と予想されています）．という背景は，1800 年頃にガウスが証明したように，「p が素数のとき，正 p 角形が作図可能なのは p がフェルマー素数のときに限る」という大定理が知られているからです．

ガウスは，19 歳の誕生日（1796 年 4 月 30 日）の直前に正 17 角形の作図法を発見して数学者になる決心をしたと伝えられています．作図に関するガウスの定理は，現在では「ガロア理論」（2011 年 10 月 25 日はガロアが生れてちょうど 200 年です）の応用例として出てきます．簡単な『代数学』の本では，ガロア理論のところでも省かれていることがあるようですので，詳しい本を参照してく

ださい；高木貞治『近世数学史談』（岩波文庫など）はガウスのこの発見から始まる絶好の数学史読本です．

“フェルマー素数” について最近驚かされたことは，2010 年のセール予想の解決（本誌 2011 年 1 月号の数論特集参照）において「フェルマー素数でない素数が無限個存在する」という事実が使われたことです．何故かオイラーの手がついたものは長い未来にわたって重要さを保っているということが判明してきます．

● (3) は三角関数 $\sin(x)$ を根 $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$ によって因数分解

$$\sin(x)=x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots$$

するというもので，オイラーの無限感覚を味わうことが楽しい論文です．これは，現代風には

$$\sin(x)=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

という無限積分解表示（(1) の解説ででてきました）となります．右辺を展開して

$$\sin(x)=x-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^3+\cdots$$

とし，“テイラー展開”

$$\sin(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

と比較して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}$$

すなわち

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

というオイラーの有名な等式が出てきます．オイラーは同様にして

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\cdots$$

なども得ています．分解表示の見事な応用です．

● (4) は現代のゼータ関数論の起源を与えていま

す．それまでは自然数全体に関する和の形のみが考えられてきたのですが，1737 年にオイラーが素数全体に関する積表示を発見したのです．このことは，自然数が素数の積に分解することのゼータによる自然な表現法になっています．素数に関する積表示はオイラー積と呼ばれています．これによって，素数の研究が格段に進歩し，リーマンの研究（1859 年）を経て素数定理の証明（1896 年，ド・ラ・ヴァレ・プーサンとアダマールが独立に）へと至り，さらには，数限りない種類のゼータの研究という大発展（本誌 1 月号参照）も，もたらされているのです．

● (5) は $\zeta(s)$ を一次式にまで因数分解しようとする研究です．言い換えると，$\zeta(s)$ の零点と極をすべて求めるという問題です．オイラーは，極 $s=1$ を用いて，（ギリシア時代から二千年振りに改良し）素数の逆数和が無限大になることを示しました（(4) の表示の対数をとるのがコツです）：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\infty$$

[オイラー式には $\log\log\infty$].

(なお，このことから，(2) の説明で出てきた「フェルマー素数でない素数が無限個存在する」ことが示せます：もし，フェルマー素数でない素数が有限個しかなかったとすると，素数の逆数和は $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{2^n}+1\right)^{-1}$ に有限量を足したもの以下となり有限となってしまいますので，背理法によって示されました.)

さらに，オイラーは $\zeta(s)$ の分解を進め，ついに実零点 $s=-2,-4,-6,-10,\cdots$ を発見します．そのために，発散級数を

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}\ (=\zeta(-1))$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots=0\ (=\zeta(-2))$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots=\frac{1}{120}\ (=\zeta(-3))$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots=0\ (=\zeta(-4))$$

のように上手く求めました．（$s=-2$ が人類史上初のゼータ零点です.）これはオイラー総和法という方法ですが，きちんとした「無限大の繰り込み」になっていることについては，次の本を見てください：

黒川信重『リーマン予想の 150 年』岩波書店，2009 年．

オイラーは，歩みを進めて——極北への歩みですが——，$\zeta(s)$ の関数等式 $\zeta(s)\leftrightarrow\zeta(1-s)$ を見つけています．詳しくは

$$\zeta(s)=\zeta(1-s)2(2\pi)^{s-1}[-s]\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

という関係式です．ここで，$[x]$ $(=\text{“}x!\text{”}=\Gamma(x+1))$ は (1) の分解関数です．たとえば

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\ \leftrightarrow\ \zeta(-1)=-\frac{1}{12}$$
$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}\ \leftrightarrow\ \zeta(-3)=\frac{1}{120}$$

と対応しています．ちなみに，$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ 等は量子力学におけるカシミール効果の計算（1948 年，カシミール）そのものです：

黒川信重・若山正人『絶対カシミール元』岩波書店，2002 年．

言うまでもないことですが，$\zeta(s)$ の虚零点を求めることが数学最大の難問『リーマン予想』の主題となります．その意味で，リーマン予想もオイラーの視程に入るのです．オイラーが求めようとしたものは，リーマン予想の先にある自然な根源的分解表示だったのでしょう．それは，きっと，自然なゼータ表現を既約表現の和（表現空間は積）へと分解することなのでしょう．

3. オイラーからの旅

この文章では「根本物への分解表示」というオイラーに見られる視点を (1)–(5) という実例に則して簡単に紹介してきました．

この観点は，もっともっと広がって行きますが，ここには，保型形式に関連したことに一言触れておくことにしましょう．分割数 $p(n)$（自然数 n を自然数の和に分解する総数，例：$5=1+1+1+1+$

$1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+2+2, 1+4, 2+3, 5$ より $p(5)=7$）に対する分解表示

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\cdots}$$

もオイラーの有名な発見です．左辺（分割数の母関数）を右辺のように分解表示しています．また，五角数定理と呼ばれるオイラーの等式（ϑ（テータ）関数・η（イータ）関数・無限次元リー環が見えます）

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$
$$= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\cdots$$

も左から右へ見れば，分解表示とみることができます．左辺に現れている

$$\frac{m(3m-1)}{2} = 1, 5, 12, \cdots \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

が「五角数」です（図 2）．

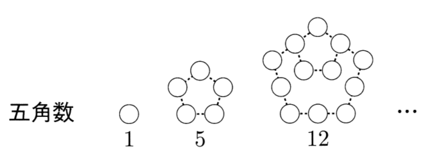


図 2

もっとも，この場合には，右辺を展開した形を計算したのが実状と言えるでしょうが．多角数については次を見てください：

黒川信重「多角数からゼータへ：紀元前から現代まで」本誌 2011 年 1 月号，7–11.

オイラーから還る旅も果てしないことを付記しておきましょう．たとえば，(1)(3) で扱われたガンマ関数や三角関数は多重ガンマ関数や多重三角関数へと発展しています．これは，オイラーのはじめた q 類似の流れとも連動しています．オイラーは指数関数 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]}$ の q 類似 $(0<q<1)$

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q}, \quad E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}x^n}{[n]_q}$$

を考えました．ここで，$[n]_q = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^k}{1-q}$ です．「q 類似」とは $q \to 1$ のときにもとのものになるという意味です：

$$\lim_{q\to 1}[n]_q = [n](=n!),$$
$$\lim_{q\to 1} e_q(x) = \lim_{q\to 1} E_q(x) = e^x.$$

オイラーは，驚くべき分解表示を与えました：

$$e_q(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x(1-q)q^n},$$
$$E_q(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x(1-q)q^n).$$

とくに，$e_q(-x) = E_q(x)^{-1}$ です．

多重化と q 類似の周辺に関しては，次の本（ちょうど 20 年前の 1991 年 4 月–7 月の講義録）を見てください（指数関数・ガンマ関数・三角関数の q 類似は第 13 講・第 14 講；第 1 講・第 2 講にはオイラーの有限版分解表示 (2.6) を用いる $\zeta(2)$ の計算やオイラーの $\zeta(3)$ 表示 (1.1) 等も）：

黒川信重・小山信也『多重三角関数論講義』日本評論社，2010 年．

また，(5) で扱われたゼータ関数の因数分解は，一元体 $\mathbb{F}_1$ という根本物からの考察が，リーマン予想の解明も目指して，進行中です：

黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社，2010 年．

これまでの話で，オイラーが分解表示（因数分解）することに情熱を持っていたことは，おわかりいただけたことと思いますが，誤解のないように補足しますと，ものを分解すれば良いということではありません．分解して全体を総合するという観点です．因数分解とはそういうものです．一例だけあげますと，ゼータの考え（オイラー積）の要点は

$$\text{自然数全体} \underset{\text{分解}}{\Rightarrow} \text{素数全体} \underset{\text{オイラー積}}{\Rightarrow} \text{ゼータ}$$

という「分解・総合」にあります．それが「分解表示」です．分解するだけならバラバラです．

オイラーの仕事は三春の滝桜のようだ，とはじめの方に書きました．オイラーが生れる 18 年前の 1689 年の緑濃くなる頃（元禄二年四月）に芭蕉が三春付近を過ぎたのは五百年前の西行を追った『奥の細道』の旅の途中のことでした（白河から須賀川あたりで「…阿武隈川を渡る．左りに会津根高く，右に岩城・相馬・三春の庄，常陸・下野の地を境いて…」とあり，「風流の初や　おくの田植うた」という有名な句を記し，その後，須賀川→郡山→二本松→福島→飯坂→白石→岩沼→名取川→仙台→塩竈→松島→石巻→平泉（中尊寺)→ …と続きます)．その頃も，北への旅の右手方向には，三春の滝桜が樹齢七百年頃を生きていたことになります．

オイラー以来の三百年程は三春の滝桜からすると，つい最近のことなのでしょう．オイラーの求めようとしたものを追求して，3.11 後の新しい世界を生き延びましょう．

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科／ゼータ研究所）

オイラーとゼータ関数のルーツ



佐藤　文広

1. リーマンのゼータ関数

整数論では，ゼータ関数と呼ばれる一連の複素関数が中心的役割を果たす．整数論はゼータ関数の科学と言ってもよいくらいである．その原型であり，素数分布の謎を秘め，今日でも神秘としか言いようのない**リーマンのゼータ関数**の紹介から始めよう．リーマンのゼータ関数は，無限級数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

で定義される複素変数 s の関数である．微分積分学で無限級数を習うとき，s が実数で $s > 1$ ならば，この級数が収束することは基本事項である．このことから，s を複素数としたときにも，リーマンのゼータ関数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し，この範囲で s の正則関数を与えることが分かる．リーマンのゼータ関数について大事なことはいくつもあるが（詳しくは，文献5)参照)，ここでは次に注目する．

a) **オイラー積**と呼ばれる無限積表示

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \tag{1}$$

を持つ．ここで右辺の無限積で p はすべての素数を動く．

b) $\zeta(s)$ は，$s = 1$ で特異点（極）を持つ以外，複素平面 $\mathbb{C}$ 上至るところ正則な関数に延長できる．このとき，$s = -2, -4, \ldots, -2n, \ldots$ は零点である．

c) $\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおく（ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数）．このとき，**関数等式**

$$\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s) \tag{2}$$

が成り立つ．

d) $s = \rho$ が $\zeta(s)$ の零点で，ρ が負の偶数でなければ，$\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ と予想されている．

この最後の d) が有名な未解決問題の**リーマン予想**である．$\pi(x)$ で x 以下の素数の個数を表すことにすると，リーマン予想は，任意の正数 ϵ に対する

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x^{1/2+\epsilon})$$

という素数の個数についての評価と同値である．ここで，$O(x^{1/2+\epsilon})$ は $\pi(x)$ を右辺の積分で近似したときの誤差にあたる項で，この記号は，その誤差項が x が十分大きいとき $x^{1/2+\epsilon}$ の定数倍以下の大きさとなることを表している．

B. リーマン（1826–66）が 1859 年の論文[6)]で示したことのポイントは，それまで，s が整数値，あるいはせいぜい実変数としてのみ考察されてきた $\zeta(s)$ を複素変数関数と考え，複素零点の分布と素数の分布との関連を見抜いたことである．

ゼータ関数は，リーマン以後拡張に継ぐ拡張を経て，今日では冒頭で述べたように，整数論とはゼータ関数の科学だと言えるほどの発展を見てい

る．新しい発展については，本誌2011年1月号特集「数論の探求」を参照してもらうこととして，今回は前史を振り返り，オイラーの仕事の中にゼータ関数論のルーツを見ていくことにする．

2. 無限級数の求和からゼータへ

無限級数の和を求める必要は，まずは，図形の面積の計算から現れてきたようである．アルキメデス（前287–前212）は「放物線の求積」において，実質的には無限等比級数

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

の和を求めている．

時代は大きく下る．17世紀のイタリアでは，復活したアルキメデスの影響もあり，カバリエリ，トリチェリ等の求積の研究が行われる．そして1650年には，ピエトロ・メンゴリ（1625–86）によって無限級数についての一書が表される．同書は表題でこそ求積法を標榜しているものの，実際の面積計算は行っておらず，その意味では，メンゴリによって無限級数論が自立したともいえる．メンゴリの示したことでその後のゼータ関数論にとって意味深いことの一つは，調和級数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

の発散である．さらに，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{2}{(m+1)(m+2)}+\cdots=1$$

を一般項の部分分数分解

$$\frac{2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}$$

を利用して示し，その一方で平方数の逆数の和

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

が難しいことに驚きを隠さず，その求和には「より豊かな知性の持主の助けがいる」と記しているそうである．この平方数の逆数の和こそリーマンのゼータ関数の $s=2$ での値 $\zeta(2)$ である．

その後，微分積分法の発展に伴い，関数のベキ級数展開を利用した無限級数の求和が行われるようになり，例えば，17世紀の後半には

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \text{（ブラウンカー）},$$
$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \text{（ライプニッツ）}$$

のような式も得られるようになる．$\zeta(2)$ の求和も，ライプニッツやベルヌーイ一族等当代一流の数学者たちの関心事となった．しかし，単に $\zeta(2)$ の値を求めるだけではなく，さらには，ゼータ関数の主要性質 a), b), c)，および，$\zeta(s)$ と素数分布との関連を明るみに出し，リーマンへの道を開くには，オイラー（1707–83）の研究が必要だったのである．

3. オイラーと $\zeta(2)$ の近似値

オイラーはまず $\zeta(2)$ の値の数値計算に取り組み，1731年には小数点以下6桁まで，その翌年にはいわゆる**オイラーの和公式**（オイラー・マクローリンの公式）を利用して小数点以下20桁まで正しい

$$\zeta(2)=1.64493406684822643647 \qquad (3)$$

という近似値を得た．オイラーの和公式とは，関数 $f(x)$ の整数点での値の和

$$S(n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

を積分 $\int_1^n f(x)\,dx$ や f の（高次）導関数の値を用いて表す公式である．オイラーの考えたことは，大雑把には次のように説明できる．もし，

$$S(x)-S(x-1)=f(x),\quad S(k)=f(1)+\cdots+f(k)$$

を満たす関数 $S(x)$ を見出すことができたとしよう．このとき，$n\geq k$ に対して $S(n)$ は $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ を表すであろう．$D=\frac{d}{dx}$ として，よく知られたテイラー展開の式を

$$S(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(x-1)}{m!}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{m!}\right) S(x-1) = e^D S(x-1)$$

と書いてみる．このとき，$S(x-1) = e^{-D}S(x)$，さらに $f(x) = S(x) - S(x-1)$ を用いて，

$$S(x) = (1 - e^{-D})^{-1} f(x)$$

となるであろう．一方，

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} \cdot x^m$$

というテイラー展開から，

$$S'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} f^{(m)}(x)$$

を得る．この式を k から x まで積分して得られる

$$S(x) = f(1) + \cdots + f(k) + \int_k^x f(t)\,dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} \left(f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(k)\right)$$

がオイラーの結果である．ここに現れた係数 b_m は**ベルヌーイ数**といわれるものである．その具体的な数値は，

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{2m+1} = 0 \ (m \geq 1),$$
$$b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_4 = -\frac{1}{30}, \ldots, b_{12} = -\frac{691}{2730}, \ldots$$

などとなる．$f(x)$ が x の多項式ではないと，上の $S(x)$ を表す公式の右辺の級数は，一般には収束せず正確な等式を与えない．しかし，有限項までの和で打ち切って残りの項の大きさを評価してやれば，数値計算の役に立つのである．オイラーは

$$\zeta(2) = \left(\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{10^2}\right) + \left(\frac{1}{11^2} + \cdots\right)$$

と分解して，はじめの 10 項は実際に計算し，残りの級数を上の和公式によって評価して式 (3) の近似値を得たのである．オイラーは同様の方法で，$\zeta(3), \zeta(4)$ の近似値も計算した．

4. オイラーと $\zeta(2) = \pi^2/6$

オイラーはもちろん近似値を求めることで満足せず執拗な追及を行い，ついに，1734 年に大発見

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{4}$$

にたどりついた．オイラーの方法は，多項式についてよく知られた因数定理（すなわち，多項式 $f(x)$ について $f(a) = 0$ ならば $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる）を，三角関数に適用するという大胆なものであった．$\sin x$ の零点が $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ であることを知るならば，因数定理より

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \tag{5}$$

となるであろう．この右辺を x のベキ級数に展開し，$\sin x$ のテイラー展開と比較するならば，$\zeta(2m)$ $(m \geq 1)$ の値が次々に求められていく．とくに，x^3 の項の係数の比較から，式 (4) が得られる．

オイラーの論文（1735）では，この考えをもう少し一般化して，π の整数倍でない実数 α に対して，

$$1 - \frac{\sin x}{\sin \alpha} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n\pi + \alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{(2n+1)\pi - \alpha}\right)$$

を導き，α を $\pi/2, \pi/3$ や $\pi/4$ などに特殊化することで $\zeta(2)$ の他にも

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \ldots, \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \cdot 93555}$$

や

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots \tag{6}$$

としたとき，

$$L(1) = \frac{\pi}{4}, \quad L(3) = \frac{\pi^3}{32}$$

などの級数の値が計算されている．ここで，$L(1) = \pi/4$ はすでに紹介したライプニッツの得た式に他ならない．$L(s)$ は，後にディリクレ（1805–59）によって導入される L 関数の一例となるものである．

オイラーの方法によって，$m = 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$\zeta(2m) = h_{2m}\pi^{2m}, \quad L(2m-1) = k_{2m-1}\pi^{2m-1}$$

とおくと，h_{2m}, k_{2m-1} が有理数であることが直ちに分かる．オイラーは，$\zeta(2m)$ $(m = 1, \ldots, 6)$ の計算から，h_{2m} がオイラーの和公式に現れるベルヌーイ数 b_m と関係があることを直ちに察したに違いない．b_{12} と h_{12} に現れる 691 という素数はそのよい手がかりになったであろう．1739 年の論文では，

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2^{2m-1}b_{2m}}{(2m)!} \cdot \pi^{2m}$$

の形でまとめられている．

オイラーの大胆な論法は，当然ながら，ダニエル・ベルヌーイなどの数学者からの異議申し立てに直面した．例えば，無限級数への因数定理の適用が許されるのかは疑問である．また $\sin x = \sin\alpha$ の解として実の解 $n\pi + (-1)^n\alpha$ $(n \in \mathbb{Z})$ 以外に虚の解はないのかという疑問も出された．

1735 年の時点では，オイラーはこれらの疑念に明快に答えることはできなかったが，再三にわたってこの問題に立ち返り，考察の手を緩めることはなかった．例えば，有名なオイラーの公式

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

は 1740 年頃には発見されていたと思われるが，オイラーは 1748 年の『無限解析入門』[1]で，この式と

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad i = \sqrt{-1}$$

とを組み合わせて

$$\sin x = \frac{1}{2i}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{xi}{n}\right)^n\right\}$$

と表し，右辺を因数分解しておいて極限を取ることで無限積表示 (5) を証明している．

5. オイラーと $\zeta(s)$ の関数等式

正の偶数 $s = 2m$ の場合の $\zeta(s)$ の求和に成功したオイラーは，s が奇数の場合も当然考察したはずである．奇数の $s = 2m-1$ に対する $\zeta(s)$ の値は今日でも謎だらけ[10]であるから，オイラーの挑戦ももちろんはねつけられた．だが，A. ヴェイユ[7]の推察によれば，オイラーのもう一つの大発見はこの挑戦が動機となっているという．その大発見とは，s が負の整数値を取るときの $\zeta(s)$ の値に関するものである．

n を正整数とすると，

$$\zeta(-n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots$$

は明らかに発散する．しかし，オイラーは，発散する級数についてもその「確定値」が適切に定まるべきだと考えていた．発散級数 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ の「確定値」を定義するオイラーの方法は，ベキ級数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

が定める関数を考え，その $x = 1$ での値を発散級数の「確定値」とするというものである．今日では，**アーベルの総和法**といわれる方法である．

ここで，あえて発散級数の「和」と言わなかったことに注意してほしい．実は，オイラーは 1754 年の「発散級数について」と題する論文の中で，級数の収束・発散の区別を明確にし，発散級数については「和」という用語を使うべきではないとの見解を述べている．「和」というのは，実際に足し合わすことのできる場合のことだというのである．そして，発散級数が代数的な有限の表示式を展開したものとして得られるときには，その表示式の値を発散級数の値（確定値）とするという考え方を示している．しばしば，オイラーは収束・発散の違いに無頓着な数学者のように描かれることがあるが，『発散級数』という書物を著した G.H. ハーディは，オイラーは決してルーズであったわけでなく，オイラーのこの考え方はむしろ時代を先取りしていると高く評価している．

ゼータ関数の話に戻ろう．オイラーは，1739 年，1749 年の 2 つの論文で $\zeta(-n)$ $(n > 0)$ の値を取り上げている．実際には，$\zeta(s)$ と簡単な関係にある

$$\begin{aligned}\phi(s) &:= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \\ &= (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \qquad (7)\end{aligned}$$

を考え，対応するベキ級数

$$R_n(x) = 1^n - 2^n x + 3^n x^2 - 4^n x^3 + \cdots \quad (n \geq 1)$$

を用いて，$\phi(-n) = R_n(1)$ とした．$R_n(x)$ は

$$R_0(x) = \frac{1}{1+x}, \quad R_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}(xR_n(x))$$

という関係式を満たすので，これを利用すれば，R_n を順次計算していくこともできるし，一般に，$n-1$ 次の整数係数多項式 $P_n(x)$ があって

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x)^{n+1}}$$

という形をしていることも分かる．また，

$$R_n\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{n+1}x^2 R_n(x)$$

という関係式も数学的帰納法で容易に示せる．この関係式で $x=1$ としてみれば，

$$\phi(-2m) = \zeta(-2m) = 0 \quad (m > 0)$$

が直ちに得られる．これは，第 1 節の b) で述べたゼータ関数の零点に関する事実の発見である．

n が奇数のときの $\phi(-n)$ について 1739 年の論文では，$\phi(-1), \phi(-3), \phi(-5), \phi(-7)$ が計算されているが，そこに現れた数値はまたもおなじみのベルヌーイ数であった．一般に，正整数 n に対し，ベルヌーイ数を用いれば

$$\phi(-n) = (2^{n+1}-1)\frac{b_{n+1}}{n+1}$$

と表せるのである．式 (7) を用いて $\zeta(s)$ についての主張に書きなおせば，

$$\zeta(-n) = -\frac{b_{n+1}}{n+1}$$

となる．ここで，n が偶数のときには，$b_{n+1} = 0$ $(n \geq 2)$ となるので，両辺はともに 0 となって等しいことに注意しよう．

ここまでくれば，$\phi(1-n)$ と $\phi(n)$ （ないしは $\zeta(1-n)$ と $\zeta(n)$）との間に関係式が存在することは明らかである．オイラーは，それを

$$\frac{1^{n-1} - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \cdots}{\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \cdots} = \frac{-(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n}\cos\frac{n\pi}{2} \qquad (8)$$

の形に表している．さらに，右辺分子の $(n-1)!$ をオイラーお得意のガンマ関数の値 $\Gamma(n)$ と解釈すれば，この関係式は n を任意の実数として成り立つことまで予想している (1749)．これが，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の関数等式 (2) の発見である．オイラーは (6) で定義される $L(s)$ についても，同様に関数等式を示している．$\phi(-n)$，そして，$\zeta(-n)$ の値は，オイラーにおいては，n ごとに異なる有理関数 $R_n(x)$ の $x=1$ での値として定義されていたことに注意しよう．これに対し，リーマンは，$\mathrm{Re}(s)>1$ で無限級数によって定義された正則関数 $\zeta(s)$ が，複素平面全体に $s=0$ を除いて正則な関数として一意的に延長（解析接続）されることを示し，延長された関数の $s=-n$ での値として $\zeta(-n)$ を把握し直した．

リーマンはリーマン面など複素関数論を大きく発展させたことでも名高いが，正則関数の重要性を認識するにあたり，オイラーの発散級数論からの刺激も大きかったようである．ゲッティンゲン大学でリーマンの学生の一人であったプリム（1841–1915）によれば，リーマンは，どのような条件の下で，ある関数の級数展開が一つの領域から他の領域へと延長できるのか，またオイラーが繰り返し行ったように，発散級数を操作して正しい結果が得られるかなり多くの場合があるのはなぜかを考察してみた後に，コーシー・リーマン方程式，ラプラス方程式に決定的重要性を付与するようになったと述べたという[9, p.250]．

6. オイラー積と解析数論の始まり

1735 年に $\zeta(2)$ の問題を三角関数の無限積表示を用いて解いたオイラーは，1937 年には，ゼータ関数 $\zeta(s)$ にも無限積表示を見出した．オイラーの書き方では

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$
$$=\frac{2^n\cdot 3^n\cdot 5^n\cdot 7^n\cdots}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)\cdots}$$

となる．これは，いわゆるオイラー積表示 (1) 式に他ならない．

オイラーはこの表示を利用して，素数を渡る和 $\sum_{p<N}\frac{1}{p}$ について N が無限大に向かうとき

$$\sum_{p<N}\frac{1}{p}\sim\log\left(\sum_{n<N}\frac{1}{n}\right)\sim\log\log N$$

のように増大しながら発散することを導いた．これから素数が無限個存在することが導かれる．

さらに興味深い研究が 1752 年になされる（出版はオイラー死後の 1785 年）．そこでは，ゼータ関数 $\zeta(s)$ のオイラー積表示と，(6) 式で定まる L 関数 $L(s)$ のオイラー積表示

$$L(s)=\prod_{p:\text{奇素数}}\frac{1}{1-(-1)^{(p-1)/2}p^{-s}}$$

を組み合わせ，さらに，すでに得ていた結果 $\zeta(2)=\pi^2/6$, $L(1)=\pi/4$ を用いて

$$\frac{3\zeta(2)}{4L(1)^2}=2=\prod_{p:\text{奇素数}}\frac{1-(-1)^{(p-1)/2}p^{-1}}{1+(-1)^{(p-1)/2}p^{-1}}$$

を得ている．この両辺の対数をとると，

$$\frac{1}{2}\log 2$$
$$=\sum(-1)^{(p-1)/2}p^{-1}+\frac{1}{3}\sum(-1)^{(p-1)/2}p^{-3}$$
$$+\frac{1}{5}\sum(-1)^{(p-1)/2}p^{-5}+\cdots$$

という式が出てくる．右辺の最初の級数は条件付き収束，その他の級数はすべて絶対収束する．オイラーは，すでに知っていた $L(3), L(5), \ldots$ の値を利用して絶対収束する級数の部分を評価し，

$$\sum(-1)^{(p-1)/2}p^{-1}=0.33349816\cdots$$

という値を求めた．この左辺は，形式的には

$$\sum_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}\frac{1}{p}-\sum_{p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)}\frac{1}{p}$$

と表せる．$\sum_p\frac{1}{p}$ は発散するのだったから，この差が収束するということより，2 つの級数

$$\sum_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}\frac{1}{p},\qquad\sum_{p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)}\frac{1}{p}$$

がともに発散することが導かれる．これは，$p\equiv 1 \pmod 4$ を満たす素数も，$p\equiv 3 \pmod 4$ を満たす素数も，どちらも無限個存在する，しかも発散が打ち消し合うということは同程度の多さで存在すると解釈することができる．この結果は，1837年の**ディリクレの算術級数定理**

> a,b を互いに素な自然数とするとき，等差数列 $an+b$ $(n=1,2,3,\ldots)$ は無限個の素数を含む

の先駆けである．

これらのオイラーの仕事によって，ゼータ関数・L 関数と素数の分布との深い関連が初めて日の光を浴び，解析数論が誕生したのだった．

7. リーマンによる関数等式の証明への道筋

すでに述べたように，オイラーが発見したゼータ関数や L 関数の負の整数における値と正の整数における値との関係は，リーマンによって，複素変数関数として全複素平面に延長されたゼータ関数が満たす関数等式（第1節の (2) 式）という形を与えられた．リーマンの1859年の論文[6]では，この関数等式に2種類の証明が与えられている．

リーマンの第1証明は，ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt$$

に基づくものである．この積分表示も，そのもとはオイラーに見られることは黒川信重氏によって注意されている[4, p.237), 3, p.142]．

リーマンの第2証明は，ヤコビのテータ級数の変換公式に基づくものである．リーマンがこの方法のヒントをどこから得たのかについては，ヴェイユ[8]の推測がある．ヴェイユは，ギーセン大学図書館所蔵のガウス『数論講究』フランス語版への書き込みを調査し，そこに $L(s)$ の関数等式

$$1-\frac{1}{3^{1-s}}+\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\cdots$$
$$=\frac{2^s\Gamma(s)}{\pi^s}\sin\frac{s\pi}{2}\left[1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots\right]$$

の証明を発見した．このガウスの本のもともとの所有者はアイゼンシュタインであり，メモには，1849年4月7日の日付がある．証明の方法は，リーマンの第2証明と極めて近いものであった．

1849年は，長らく忘れられていた $L(s)$ の関数等式が，シュレーミルヒ，マルムステンによって再発見され，その証明が発表された年である．アイゼンシュタインは，この結果を自らの発見としてはいないので，彼は，シュレーミルヒ，マルムステンの仕事から関数等式を知った，もしくはオイラーの論文から直接知ったのではないか，というのがヴェイユの想像である．リーマンは同年までベルリンにいてアイゼンシュタインと親しい関係にあったため，アイゼンシュタインの方法がリーマンの第2証明のヒントを与えた可能性は十分に考えられるのである．

アイゼンシュタインは，証明の出発点を

$$\int_0^\infty e^{\sigma\psi i}\psi^{s-1}\,d\psi=\frac{\Gamma(s)}{|\sigma|^s}e^{\pm s\pi i/2} \tag{9}$$

という積分公式にとった．ここで，$0<s<1$ であり，符号 $\pm$ は σ の正負と一致する．そして，$0<\alpha<1$ に対し

$$\int_0^\infty\left(\sum_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty}e^{2\pi(\alpha+\sigma)\psi i}f(\sigma)\right)\psi^{q-1}d\psi$$

という積分を考え，まずは (9) を用いて直接項別積分を行う．つぎに，$f(\sigma)=e^{2\beta\pi i\sigma}$ $(0<\beta<1)$ として，被積分関数に含まれる級数にポアッソンの和公式を適用してからもう一度同様の項別積分を行う．こうして2通りの計算結果が得られるが，それを等置すると，最終的には，

$$e^{-\alpha\beta\cdot 2\pi i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}\frac{e^{\sigma\alpha\cdot 2\pi i}}{(\sigma-\beta)^{1-q}}$$
$$=\frac{\Gamma(q)}{(2\pi)^q}e^{(q\pi/2)i}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}\frac{e^{\sigma\beta\cdot 2\pi i}}{(\sigma+\alpha)^q}$$
$$+\frac{\Gamma(q)}{(2\pi)^q}e^{(-q\pi/2)i}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}\frac{e^{\sigma\beta\cdot 2\pi i}}{(\sigma-\alpha)^q}$$

という関数等式が得られる．

これは，今日では，**フルヴィッツ・レルヒのゼータ関数**と呼ばれているものの関数等式に他ならな

い．この等式で，$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ と特殊化すると，$L(s)$ の関数等式が得られるのである．

アイゼンシュタインは，積分公式 (9) をディリクレの 1839 年の論文から引いているが，ディリクレ自身は，これもそのもとはオイラーの発見であるとしている．したがって，リーマンの第 2 証明もその源流はやはりオイラーに遡れると言えよう．

(9) のような等式は，今日では局所関数等式と呼ばれている．このような等式を一般化することができれば，アイゼンシュタインの方法にならい，ポアッソンの和公式と組み合わせて，一般化されたゼータ関数の関数等式が得られるのではないだろうか．このような発想を実現した理論が 1960 年代に佐藤幹夫氏が創めた概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論[2)]である (ただし，アイゼンシュタインの仕事が発掘されたのは近年のことであり，その影響があったわけではない)．実は，概均質ベクトル空間のゼータ関数というのは筆者の主たる研究対象であって，こうして振り返ると，自分もオイラーを源とする流れの川岸に遊んでいるのだなという感を深くする．

参考文献と注

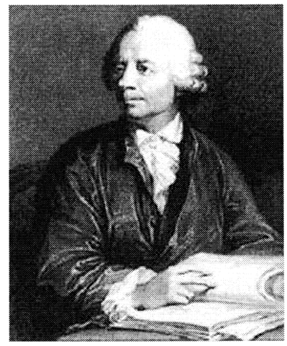
1) レオンハルト・オイラー著，高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』海鳴社，2001.
2) 木村達雄著『概均質ベクトル空間』岩波書店，1998.
3) 黒川信重著『オイラー探検』シュプリンガー・ジャパン，2007.
4) W. ダンハム著，黒川信重，若山正人，百々谷哲也訳『オイラー入門』シュプリンガー・ジャパン，2004.
5) 松本耕二著『リーマンのゼータ関数』朝倉書店，2005.
6) B. Riemann, “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, Monatsber. Preuss. Akad. wiss. Berlin (1859), 671–680.
7) アンドレ・ヴェイユ著，足立恒雄，三宅克哉訳『数論—歴史からのアプローチ』日本評論社，1987.
8) A. Weil, On Eisenstein's copy of the Disquisitiones, *Adv. Studies in pure Math.* **17**, Algebraic Number Theory – in honor of K. Iwasawa, 1989, pp.463–469.
9) U. ボタチーニ著，好田順治訳『解析学の歴史—オイラーからワイアストラスへ』，現代数学社，1990.
10) $\zeta(3)$ は無理数 (Apery, 1978)，$\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ のうちの一つは無理数 (Zudilin, 2002) などが最近知られるようになった．

(さとう・ふみひろ，立教大学理学部)

特集／オイラー

オイラーの無限解析

関数概念の発生と無限解析の変容



高瀬　正仁

1. 万能の接線法

オイラーは無限解析に関数の概念を提案した数学者として知られているが，ではオイラーはなぜ関数概念を導入しなければならなかったのであろうか．本稿ではオイラーにおける関数概念の発生の契機を考察し，「その淵源は変分問題にある」という仮説を提示したいと思う．

オイラー以前の無限解析の究明の対象は関数ではなく曲線であった．ライプニッツとベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）という，無限解析の創造と形成に携わった三人の数学者の名が即座に念頭に浮かぶが，「特定のひとり」ということであればライプニッツの名を挙げるほかはない．ライプニッツが微分計算の基本思想を表明したのは1684年の論文

「分数量にも無理量にも妨げられない，極大と極小および接線を求めるための新しい方法．ならびにそれらのための特殊な計算」

においてであり，この論文が今日の微分法の嚆矢である．だが，現在の微分法が関数を対象にして「関数を微分する」のに対し，ライプニッツの論文のタイトルには「極大」，「極小」，「接線」という言葉が見られるばかりである．「極大」と「極小」は曲線の極大点と極小点であり，接線というのは「曲線の接線」である．しかも極大点と極小点は曲線が「そこで平坦になる点」すなわち「接線がそこで軸と平行になる点」として認識されるから，根幹に位置を占めるのは接線法である．ライプニッツにとって微分法とは「曲線の形を探索し接線を引く方法」のことなのであり，しかもその方法は「分数量にも無理量にも妨げられない」というのであるから，**万能の接線法**という印象が漂っている．

微分と対をなす積分について，ライプニッツは1684年の微分計算の論文から二年後の1686年に，

「深い場所に秘められた幾何学，および不可分量と無限の解析について」

という論文を公表した．タイトルに積分を感知させる文言はないが，ここで表明されたのは積分計算の基本思想である．

ライプニッツが公表した二篇の論文をめぐって，ライプニッツとベルヌーイ兄弟の間で往復書簡が取り交わされるという出来事が生起した．ライプニッツの所在地はドイツのハノーファー，ベルヌーイ兄弟の所在地はスイスのバーゼルである．ベルヌーイ兄弟はライプニッツの二論文によほど心を惹かれたようで，兄弟で協力して解明に取り組んだが，尽きることのない疑問の数々にうながされたのであろう，ライプニッツに宛てて手紙を書いた．ライプニッツもまたこれに応じ，それから長い年月にわたって文通が続いた．ヤコブからライプニッツへの第一書簡の日付は1687年12月15日．これを受けて1690年9月24日付でライプニッツから返信があった．ライプニッツにも諸事情があって返信が送れたのである．ヤコブの弟のヨハンからライプニッツへの第一書簡の日付は1693年12月20日．ライプニッツからの返信は1694年3月21日付である．どの手紙もいわば数学的書簡であり，ベルヌーイ兄弟はこの往復書簡を通じて議論を重ねるなかでライプニッツの無限解析の思想を理解し，手法を自家薬籠中のものとした．

無限解析の基本思想を表明したのはたしかにライプニッツだが，ライプニッツの二論文で描かれたのはあくまでも無限解析のスケッチである．昇華して一枚の絵が完成するためにはベルヌーイ兄弟との交流が必要だったのである．

2. マルキ・ド・ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』

「関数」という言葉そのものはライプニッツの著作にも登場するが，ライプニッツのいう関数は今日の微積分の関数ではない．今日の関数概念の淵源はオイラーである．オイラーの1748年の著作『無限解析序説』(全二巻）の巻1の冒頭で,「関数とは変化量と定量で組み立てられた解析的式のことである」という有名な概念規定がなされたが，これをもって関数概念の初出と見るのが数学史の通説である．

『序説』の巻2のテーマは曲線の理論である．関数が先で曲線が後になっているが，オイラーには**曲線の解析的源泉**を関数に求めるというアイデアがあり,「曲線を関数のグラフとして認識する」という立場が打ち出されたのである．前もって関数概念を規定しておくと，ひとつの変化量xを元手にしていろいろな変化量$y = f(x)$を次々と作り出すシステムが構築され，そのグラフを描くことにより，多種多様な曲線を一望のもとに概観する視点が確保される．関数概念を広く取れば取るほど，曲線と呼ばれる図形の世界もまた大きく広がっていくが，ではオイラーはなぜそうしたのであろうか．

ライプニッツとベルヌーイ兄弟が探究したのは関数ではなく曲線の諸性質である．1691年から1692年にかけてのことだが，ヨハン・ベルヌーイはパリに行き，マールブランシュのサロンで無限解析の講義を行った．聴講者の中に数学を愛好するマルキ・ド・ロピタルという貴族がいて，ヨハンの講義に深い関心を寄せ，ロピタルひとりのための特別講義を依頼した．これは実現し，ロピタルは講義の記録をそのまま写して一冊の著作を作って出版した．それは

『曲線の理解のための無限小の解析学　第一部　微分計算』(1696年)

という作品で，近代数学史上，一番はじめに現われた微積分のテキストになった．不定極限値の計算法を教える有名な「ロピタルの定理」もここに登場する．第二部も企画され,「積分計算」というタイトルになるはずだったが，これは日の目を見なかった．ロピタルの著作はヨハン・ベルヌーイの講義の写しであるからロピタル自身の創意にはとぼしいが，二版，三版と版を重ね，解説書も出現した．初期の無限解析はもっぱらロピタルの著作を通じてヨーロッパ世界に浸透していったのである．

ロピタルの著作はタイトルに意味があり，タイトルに見られる「曲線の理解のため」という言葉には，無限解析のねらいが「曲線の理解」にあったことが直截簡明に示されている．「無限解析」になぜか「小」の一字が添えられて「無限小解析」となっているところも人目を引くが，ロピタルの目には無限解析が「無限小」の解析学のように映じたのであろう．

3. 曲線の解明に寄せる情熱

ライプニッツもベルヌーイ兄弟もロピタルも，だれもみな曲線というものの理解をめざしていたのはまちがいないが，ライプニッツ以前にさかのぼる歴史，すなわち「無限解析前史」のねらいもまた「曲線の理解」であった．

古いギリシアの数学にもいろいろな曲線が登場する．円も曲線だが，他の曲線を回想すると，アルキメデスの螺旋，アポロニウスの円錐曲線（楕円と双曲線と放物線)，ニコメディスのコンコイド，ディオクレスのシソイドなど，ギリシア数学史の曲線の世界はきわめて多彩である．古代ギリシアの数学者たちは何かしら固有の理由があって曲線に関心を寄せたのであろう．その諸相の解明はひとまず措いてヨーロッパ近代に目を移すと，古代ギリシアと比べて関心の持ち方は同じとは言えないものの，ここにもまた多種多様な曲線が登場する．ヨーロッパの近代もまた曲線というものの姿に深く心を奪われたのであり，曲線に寄せる得体の知れない情熱の中から生まれたのが無限解析なのであった．

ヨーロッパの近代を代表する数学者はデカルトとフェルマである．デカルトには「デカルトの葉」と呼ばれるおもしろい形の曲線があり，フェルマが関心を寄せた曲線の中には，フェルマの名を冠した「フェルマの螺旋」などがある．フェルマは曲線に接線を引く方法を追究した人で,「ディオクレスのシソイド」やサイクロイドに接線を引くことに成功した．「ディオクレスのシソイド」は**代数曲線**だが,「フェルマの螺旋」やサイクロイドは代数曲線ではなく，超越的な曲線，略して**超越曲線**の仲間である．超越曲線というのは代数的ではない曲線の総称にすぎず，積極的な概念規定がなされているわけではないが，まさしくそれゆえに超越曲線はひとつひとつの事例が重い意味をもつのである．正弦曲線や余弦曲線は超越曲線であり，指数曲線と対数曲線も超越曲線，古くはアルキメデスの螺旋も

超越曲線だが，ヨーロッパ近代の数学をもっともよく象徴する超越曲線はサイクロイドである．

ヨーロッパ近代の曲線論を回想すると**曲線を方程式で表示する**という，デカルトに由来すると言われるアイデアが際立っている．円も円錐曲線もみな方程式で表示されるが，では方程式とは何かといえば，$f(x,y)=0$ という形の等式のことである．ところがさらに踏み込んで $f(x,y)$ とは何かと問い詰めていくと，たちまち返答に窮してしまう．「x と y の関数」という答は関数概念のない時代には通用しないが，代数的な式，すなわち文字 x, y と数をもとにして，加減乗除の四演算と「冪根を作る」という演算を自由に施して組み立てられる式に限定するのであれば，正体は自明である．代数的な式 $f(x,y)$ を用いて方程式 $f(x,y)=0$ により表示される曲線を指して，一般に代数曲線と諒解することにする．この言い換えは無限解析の形成過程の解明において重い意味をもっている．

では，超越曲線はどうかというと，ライプニッツの1894年の論文のタイトルの真意がここにいたってにわかに判然とするような思いがする．そこには「分数量にも無理量にも妨げられない接線法」という文言が見られたが，これは「代数曲線にも超越曲線にも適用可能な接線法」というほどの意味の言葉であり，「万能の接線法」の発見を告げる大胆不敵な大宣言である．

4. 曲線を理解するということ

「接線を引くこと」や「極大点と極小点に位置を定めること」は，ロピタルの著作の書名に言われている「曲線を理解する」ということの基本的な側面である．だが，そもそも曲線とは何だろうか．

ライプニッツの時代には曲線の一般的な概念規定は存在せず，必要でもなかったのではないかと思われるが，代数曲線であれば代数的な方程式を書き下すだけのことであるから，一般的な視点からの観察が可能であった．一般概念が存在しなかったのは超越曲線である．超越曲線とは何かと正面から問われて答えるのはむずかしいが，一般概念が手中になくても，たとえばサイクロイドのように，具体的に提示された曲線が代数的ではないことはすぐに判明する．代数的であろうとなかろうと，式で表示された曲線が具体的に提示されたなら，いつでも自在に接線を引くことができるし，極大点と極小点を探索することもできるというのが，ライプニッツの主張である．さながら魔法のような計算術であり，ベルヌーイ兄弟がライプニッツのアイデアをエニグマ（巨大な謎）と称したという話が伝わっているほどである．理解しがたいのと同時に，どこまでも心を引きつけられてやまない不思議議な魅力がたたえられていたのであろう．

17世紀のヨーロッパの数学者たちは古い由来をもつ二つの曲線，シソイドとコンコイドに関心を寄せた．近代の「曲線の理解」は古代の回想から始まるのである．フェルマとロベルヴァル（フェルマの友人）はコンコイドに接線を引くことに成功し（1634年），ホイヘンスとウォリスは，コンコイドとその漸近線で囲まれる領域の面積を算出することに成功した（1658年）．サイクロイドの考察はクーサに始まると言われている．クーサは15世紀のドイツの哲学者で，司教でもあった人物である．フランスにはカトリックの修道士だったメルセンヌという人がいて，サイクロイドの囲む面積を求める問題をロベルヴァルにこの問題を提示したところ（1628年），ロベルヴァルはこれに成功した（1634年）．ロベルヴァルが自慢してデカルトに伝えたところ，デカルトは，「みごとな結果だ．私は気づかなかった．だけど並の技巧をもった幾何学者なら，だれにとってもむずかしいことではないよ」などと応じたという．

デカルトはサイクロイドに接線を引く方法を考案したようで，この問題をロベルヴァルに提示した．ロベルヴァルは失敗したが，フェルマは成功した．フェルマはこの問題をロベルヴァルに教えられたのであろう．

サイクロイドという名前を提案したのはだれかというと意外にもガリレオ・ガリレイで，1599年のことである．ガリレオは1639年になってトリチェリに手紙を書き，サイクロイドの諸性質を40年も研究していると伝えたという．ガリレオもまたサイクロイドの囲む面積を求めようと試みたが，サイクロイドの面積ならトリチェリもまた独自に発見した．ガリレオの弟子のヴィヴィアニはサイクロイドに接線を引く方法を発見した．パスカルはサイクロイドの面積の算出と重心の決定に成功し，これに加えてサイクロイドを軸の回りに回転させてできる立体の体積と表面積も算出した．

デカルト，フェルマ，ロベルヴァル，トリチェリ，ガリレオ，ヴィヴィアニ，パスカルと，17世紀を代表する科学者，数学者たちがこぞってサイクロイドの研究に専念し，サイクロイドを理解しようとする活気に満ちた試みが重ねられた．

5. ニコラウス・クザーヌス

曲線に接線を引くには曲線を認識するための視点を明確に定める必要があるが，デカルトやフェルマは曲線というものをどのように理解していたのであろうか．当時の文献に散見するヒントを参照すると，曲線とは**無限小の長さの辺が連繋して形成される無限多角形**であるという諒解様式が浮上する．「無限小の長さをもつまっすぐな線」という観念が実体として受け止められていたのである．

このように曲線を把握すると，接線とはいかなるものかも理解される．ある曲線 C が提示されたとして，そのうえの点 P を指定すると，点 P を含む無限小の辺 L が存在する．L は無限小の長さをもつまっすぐな線，言い換えると無限小線分であり，点 P における曲線 C の接線の無限小の断片である．そこで L をどこまでも延長して無限直線を描けば，それがつまり点 P における曲線 C の接線である．では，このような視点それ自体はどこからきたのであろうか．ギリシア時代にはなかったものであり，何かしらきわめて特異な考え方のように思われるが，このアイデアは神秘主義的な傾向をもつ中世ドイツの宗教者ニコラウス・クザーヌスに由来すると言われている．クザーヌスは円を観照し，**円とは無限小の辺をもつ無限多角形である**と語ったという．この思想が数学者たちに継承されて，円のみならず，一般に曲線というものを「無限小の辺をもつ無限多角形」と見る観念が共有されたのであろう．

今日の目には，実体化された無限小という観念はいかにも厳密さを欠いているように見えるが，「無限小の辺をもつ無限多角形」という神秘的な曲線の観念から無限解析が生まれたことはまちがいない．数学という学問は根底のところで人間の論理を超越する．数学がときたま見せる神秘感は，数学そのものの特性に根ざしているのではないかと思う．

6. 接線法と微分計算

接線法の実際の姿を観察したいと思う．一例として半径 a の円の方程式

$$x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$$

を書き，この円の上の一点 $\mathrm{P}=(u,v)$ を取り，この点において円に接線を引くことを考えてみよう．円を「無限小の辺をもつ無限多角形」と見ているのであるから，点 P を通る無限小の辺が存在し，その辺上の点 Q は，dx と dy は無限小量として，$\mathrm{Q}=(u+dx,v+dy)$ という形になる．そうして点 Q は同じ円の上にあるから，等式 $(u+dx)^2+(v+dy)^2=a^2$ が成立する．これを通常の代数の計算規則にしたがって展開すると

$$u^2+v^2+2udx+2vdy+(dx)^2+(dy)^2=a^2$$

となるが，位数 2 の無限小部分 $(dx)^2+(dy)^2$ を削除すると，$u^2+v^2=a^2$ も考慮して，dx と dy の関係を示す一次式

$$udx+vdy=0$$

が残る．これが「点 P を通る円の無限小辺」の方程式であり，無限に延長していくと接線が描かれる．その方程式は，$u(x-u)+v(y-v)=0$, すなわち $ux+vy=a^2$ である．

この接線法には二つの見どころがある．ひとつは，円を無限小の辺をもつ無限多角形と見るという視点であり，もうひとつは，位数 2 の（位数 1 に比べて高位の）無限小を削除するという作業が遂行されていることである．

もう少し一般に曲線 $f(x,y)=0$ が与えられたとして，この曲線上の点 $\mathrm{P}=(a,b)$ において接線を引くことを考えてみよう．円の場合と同様に考えて，まず等式

$$f(a+dx,b+dy)=0$$

を書く．ここから先は道が分岐していくが，$f(x,y)$ が多項式なら，$f(a+dx,b+dy)$ を二項定理で展開すると，

$$f(a+dx,b+dy)=f(a,b)+Adx+Bdy$$
$$+\{dx \text{ と } dy \text{ の作る次数 2 以上の多項式}\}=0$$

という形の等式が得られる．A と B はある定まった数値である．ここで $f(a,b)=0$ であることに留意して，さらに $\{dx$ と dy の作る次数 2 以上の多項式$\}$ を削除すると，等式 $Adx+Bdy=0$ が残る．これが点 P を通る曲線の無限小辺の方程式であり，無限に延長すると，

$$A(x-a)+B(y-b)=0,$$

すなわち $Ax+By=aA+bB$

という接線の方程式が生成される．

$f(x,y)$ が多項式の場合，すなわち曲線が代数的な場合にはこれでよいが，曲線が超越的な場合には二項定理で展開するというわけにはいかない．ここにおいてライプニッツの微分計算の出番が訪れて，たとえ $f(x,y)$ が多項式ではなくても，微分計算の支援を受けると，

やはり

$$f(a+dx, b+dy) = f(a,b) + Adx + Bdy$$
$$+ \{dx \text{ と } dy \text{ の作る次数 2 以上の多項式}\} = 0$$

という形の等式が得られるのである．ただし，代数的な場合とちがい，$\{dx$ と dy の作る次数 2 以上の多項式$\}$ の部分は「無限に多くの項をもつ多項式」，すなわち無限級数になる．そこで今日の微積分では収束の問題などを細かく論じたりすることになるが，その前に $f(x,y)$ が何であってもこのような展開がつねに可能とは限らないのではないかという疑問もある．そのあたりの消息を詰めていくと理論体系は次第に精密さを増していくが，接線法のアイデア自体は上記の展開式を書き下すことに尽きている．

今日の微積分の用語でいうと，微分 dx, dy の係数 A, B はそれぞれ関数 $f(x,y)$ の x, y に関する偏微分係数の点 P における値である．

7. 変分計算—もうひとつの曲線論

ライプニッツが発見した微分計算と積分計算の基本原理により曲線を理解するための究極の手法が与えられ，デカルトやフェルマ以来の思索の系譜の到達点が示されることになった．「曲線を知る」という当初の目的は，無限解析の誕生に伴ってほぼ完全に達成されたと言えそうだが，ここにもうひとつ，力学的色彩を帯びた曲線論が存在する．それは**最短降下線**の問題である．

最短降下線を求めようとする問題は確かに力学の問題である．今，空間のある位置 P に質点が配置されているとして，重力の作用を受けて点 P から出発し，P を通る鉛直面内に描かれたある曲線に沿って，もうひとつの点 Q に到達するまでの時間が最短になるようにするには，どのような曲線を描けばよいのであろうか．これが最短降下線の問題である．

二点 P, Q を結ぶ曲線 C を描き，それを，オイラーのアイデアを採用して関数 $y = f(x)$ のグラフとして認識することにする．点 P を座標の原点に取り，点 Q の座標を $(y,x) = (b,a)$（水平方向に y を取り，垂直方向に x を取る）とし，エネルギー保存則に基づいて計算を進めると，質点が曲線 C に沿って降下して点 Q に到達するまでの時間は，

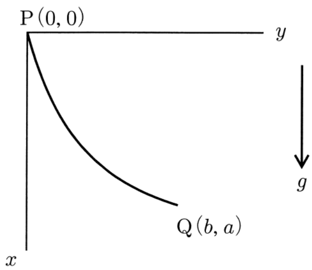


図 1　最短降下線.

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1+p^2}{2gx}}\,dx$$

$(p = \dfrac{dy}{dx}$. g は重力に起因する加速度.)

という積分で表される（図 1）. この積分は曲線 C に依存するが，曲線は関数のグラフとみられているのであるから，関数 $y = f(x)$ に依存すると言っても同じことになる. だが，この言い換えには無限解析の様相を一変させるほどの重い意味が伴っている.

この積分において y をさまざまに変動させて，積分の値に最小値を与える関数 y を探索するのが**変分問題**である. 曲線もしくは関数の極値問題と同じ性質の問題だが，曲線や関数の場合には変化するのは変化量 x であったのに対し，今度は関数そのものが変化するのであるから，幾何学的知覚は意味をもちえない. ここにいたって極値問題というものの本性に向けて，深刻な反省を強いられる場面に直面する.

曲線に接線を引く問題であれば，曲線の方程式 $f(x,y) = 0$ を微分して接線の方程式 $Adx + Bdy = 0$ を作る. 曲線の極大点と極小点の位置を定めたいなら，方程式 $dy = 0$，すなわち $Adx = 0$，すなわち $A = 0$ を解くことになるが，なぜかといえば曲線を「無限小の辺をもつ無限多角形」と見るというクザーヌスに淵源する思想が受け入れられているからである. 極大点もしくは極小点では，その点を含む無限小辺は x 軸と平行である. これは y 軸方向への変位がないということにほかならず，数式で表すと $dy = 0$ という方程式になる.

変化量が変化する代りに，曲線もしくは関数そのものが変化する場合には，極値問題をどのように理解したらよいのであろうか. オイラーは，曲線の理解の場合に認識された方程式 $dy = 0$ に相当するものが，変分問題の場合にも必ず存在するという確信をもっていたようで，その探索を試みて成功した. それは今日の変分法で**オイラー・ラグランジュの方程式**と呼ばれているものの原型である. 最短降下線の問題の場合，定量 $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ は無視することにして 3 個の変化量 x, y, p の関数 $F(x,y,p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{x}}$ を設定すると，オイラーが発見した方程式は，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

という形の微分方程式である.

曲線を「ほんの少しずらす」と積分値もまた少しだけ変化する. だが,「曲線の無限小変分」を観念的に考えるのはやさしいが，観念のままでは計算に乗せていくことはできない. 曲線を方程式で表すことにより無限解析という名の計算システムが成立したのと同様に，曲線の変化を適切な意味合いにおいて解析的に表示することを許す概念装置が要請されるが，オイラーは関数概念をもってこの要請に応じた.

曲線に代って「関数の無限小変分」を心に描き，曲線から離れた場所で無限解析を十分に広く展開して,「関数 f の無限小変分 δf に対応する積分値 I の無限小変分 δI」を計算する手だてを確立する. そうしてそのうえでなお一歩を進め,「δI が消失する」という状勢を表す方程式を書き下すことができたなら，曲線の極値問題の場合の方程式 $dy = 0$ に相当する方程式が手に入るであろう. もはや図形的な直観が働く余地は失われ，さながら水に描く絵のような心もとない作業になるが，オイラーはこの道筋の存在を確信し，実際に道を開いて**オイラーの方程式**を発見した. 真に「数学の創造」の名に値する事態である.

最短降下線の問題にもどると，関数 $F(x,y,p)$ に対して,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

と計算されるから,「オイラーの方程式」は,

$$\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \text{定量}\left(= \frac{1}{\sqrt{2a}}\ \text{と置く}\right),$$

$$\text{すなわち}\ p = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

という形になる. 変数を分離すると $dy = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$. 両辺の積分を作れば,

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx + C \quad (C\ \text{は定量})$$

となるが，初期条件「$x = 0$ のとき $y = 0$」により $C = 0$ となることがわかる. 以下，少々計算を進めると,「オイラーの方程式」の解のパラメータ θ を用い

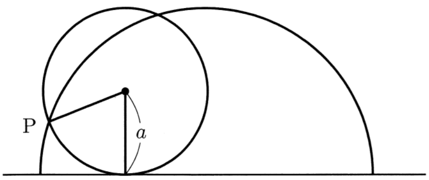


図 2　サイクロイド．$\mathrm{P} = (x, y)$, $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

る表示式

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a(\theta - \sin\theta)$$

が得られる．この式が表す曲線は，半径 a の円を直線上に配置して転がしていくとき，最初の接点が描く図形，すなわちサイクロイドにほかならない（図 2）．

最短降下線はサイクロイドである． かつてヨハン・ベルヌーイが提出した問題を，オイラーは半世紀の後に独自の斬新な方法で解決したことになる．

最短降下線のことを Brachistchrone（ブラキストクローネ）と呼ぶこともある．古いギリシア語に由来する言葉であり，「ブラキスト」は「もっとも短い」，「クローネ」は「時間」を意味する．命名したのはヨハン・ベルヌーイである．

最短降下線の問題はガリレオの『新科学対話』(1638 年）にも見られ，最短降下線は円弧であるというのがガリレオの主張であった．次にヨハン・ベルヌーイは 1696 年 6 月の「学術報告」誌においてこの問題を提起した．1696 年というと，ロピタルの著作が刊行された年でもある．ヨハンの挑戦に対し，ヨハンの兄のヤコブ，ライプニッツ，ロピタル，それにイギリスのニュートンがこの挑戦に応じた．ニュートンは匿名で解答を寄せたが，ヨハンはその解答を見てすぐにニュートンと見抜き，「ライオンは爪を見ただけでライオンとわかる」とつぶやいたという，伝説めいたエピソードが残されている．

8. クザーヌスの思想と関数概念

オイラーは早い時期から変分問題に関心を寄せていたが，1744 年，

> 『極大または極小の性質をもつ曲線を見つける方法．あるいは，もっとも広い意味合いで諒解された等周問題の解法』

という著作を刊行し，多数の計算例とともに根幹を作るアイデアを組織的に表明した．今日のいわゆる変分法の誕生を告げる作品で，ヨーロッパ近代の 400 年の数学史の中でも屈指の傑作である．1744 年のオイラーは 37 歳である．4 年後の 1748 年には『無限解析序説』の刊行を見て，関数概念がはじめて公に表明された．この間に 4 年ほどの時間差があるが，オイラーの無限解析の対象が「曲線」から「関数」へと移り行く過渡期であり，印象はきわめて神秘的である．

1744 年の変分計算の著作では，オイラーが無限小変化させているのはあくまでも曲線であり，この時点ではまだ関数ではないが，実際の計算の姿を観察すると，すでに関数が無限小変分を受け入れているように見える．意識の焦点は次第に曲線を離れがちになり，関数の待つ彼岸へと移動しようとしているのである．

『無限解析序説』に沿ってオイラーのアイデアを再現すると，平面上に曲線を描き，それから一本の無限直線を引く．その直線を軸と呼び，軸上に点 A を任意に指定して，それを始点と呼ぶ．曲線上の点 M から軸に向けて垂線を降ろし，その垂線の足を P として，始点 A から P までの距離を x で表す．軸には向きがつけられているから，x は P の位置に応じて正にも負にもなる．二点 M, P を結ぶ線分の長さを y で表す．平面は軸により二分されるから，点 M の位置に応じて y もまた正にも負にもなる．こんなふうにして曲線上の点 M に対応して二つの数値 x, y が定まるが，点 M が曲線上を動いていく情景を念頭に思い浮かべると，x と y は変化量のように見える．この場合，x と y は無関係ではありえず，曲線を表す方程式 $f(x, y) = 0$ により相互に結ばれている．オイラーの目には y は x の関数のように見え，逆に x は y の関数のように見えたのであろう．

たとえ出発点を曲線に定めても，曲線の方程式 $f(x, y) = 0$ を書き下すと x と y の関係が非常に明瞭に認識されて y は x の関数のように見え，無限解析の対象になりそうである．曲線から関数へと視点を転換し，曲線とは無縁の場所に無限解析を構築し，曲線の変分に代って関数の変分を考えることにすれば無限解析の守備範囲になる．1744 年の著作ではオイラーはあくまでも「曲線を変化させる」ということを言い，実際に最短降下線の問題のような場合には，観念的に考える限り，それで十分である．

だが，計算を遂行する場面になると「曲線の変化」ということの意味合いは不明瞭になりがちである．微分計算を遂行して「オイラーの方程式」を導こうとする計算は難解で，曲線の理解のために構築されたライ

プニッツとベルヌーイの無限解析では力が足りず，この路線を歩み通そうとする決意が堅固である限り，無限解析の力を強化する方策を講じなければならない．1744 年の著作を見ても，看板に掲げられた理念はあくまでも「曲線を変化させる」ことでありながら，実際にはライプニッツとベルヌーイ兄弟を越える微分計算が駆使されている．無限解析が大きく変容を迫られる契機がここに芽生えている．

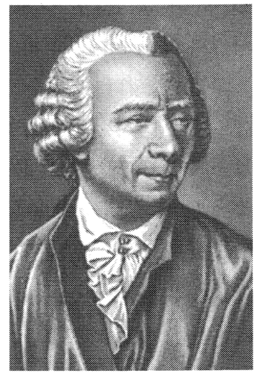
「オイラーの方程式」を書き下すことができたなら，引き続きそれを解かなければならないが，曲線の理解のための無限解析はここでもまた力不足である．「オイラーの方程式」が提供する複雑な微分方程式を解くには，「曲線の理解とは無関係に微分方程式を解く」という強い信念に裏打ちされた強力な無限解析が要請され，この場面において積分計算は大きな変容を迫られるのである．オイラーの 60 代の著作『積分計算教程』（1768–1770 年）は全三巻の全体が微分方程式の解法理論で埋め尽くされているが，積分計算が曲線の理論を離れて微分方程式論へと変容したのは十分に理由のあることであり，オイラーの長年の苦心の産物である．曲線から関数が抽出されようとする瞬間をまざまざと目の当たりにするような，見る者の心情を大きく揺する光景である．

オイラーは変化するものが曲線そのものである場合にも，曲線や関数の極値問題における方程式 $dy = 0$ に相当する必要条件が存在することを確信していたと思われるが，そこに論理的な根拠があるわけではない．一般に変分問題では曲線に依存する積分値に極値を与える曲線を決定することが要請されるが，そのような曲線は，**その曲線に無限小変分を施しても積分値は変動しない**という性質を備えているはずである．無限解析の根幹に触れる強固な確信である．この確信を信頼して歩みを進めると関数の概念に逢着し，強化された無限解析の力に支えられて関数の変分を計算すると本当に「オイラーの方程式」が発見され，最短降下線の問題も解決された．曲線を「無限小の辺が連なって生成される無限多角形」と見るというクザーヌスに由来する観念が，根底に横たわる理念において依然として継承されている．芭蕉の俳諧のいわゆる不易と流行はヨーロッパ近代の数学の流れにも見られるのである．

オイラーの変分計算のはじまりを告げる 1744 年の著作の邦訳が出現する日を楽しみに待ちたいと思う．

（たかせ・まさひと，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

オイラーと複素関数論



野口 潤次郎

オイラーと言えば，かなり多くの人が

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

と答えるであろう（$i = \sqrt{-1}$）．それほどにこの**オイラーの公式**は有名であり，本項の複素関数論と深い関係がある．しかし，いきなりこのことに入るのではなく，その前に少し当時の背景について見てみたい．

1. オイラーの時代

オイラー（Leonhard Euler）は，18 世紀を生きた数学者であると言ってよいだろう．1707 年スイス・バーゼルに生まれ，1730 年ロシア・ペテルブルグへ移住，1741 年ドイツ・ベルリンへ移住，1744 年プロシャへ移住，1766 年再びペテルブルグへ移住，1783 年同地で死去した．

この時代の日本の文化状況はと言うと，17 世紀後半からの元禄文化が花開き，1701 年に没した契沖の後，荷田春満（1699～1736），賀茂真淵（1697～1769），そして本居宣長（1730～1801）がついに『古事記伝』（1764～1798，全 48 巻）を完成・出版し日本文化の古典学を成就した．文芸・絵画・舞台芸術においても高レベルの境地が達成された．そしてこの世紀の終わり頃，オイラーが没した 1783 年には浅間山が大噴火し天明の大飢饉（～1788）が始まる．1790 年には，寛政異学の禁により，昌平黌においては朱子学以外が禁止された．この間の将軍としては，“吉宗”（将軍職 1716～1745）を一人挙げよう．

ヨーロッパとの関係では，蘭学が栄えロシアにおいてもオイラーが活躍したペテルブルグに 1705 年日本語学校が設置され，さらには 1764 年イルクーツクに日本航海学校が設立されるという時代でもあった（文献 7) を参照）．どうもこの頃から既にロシアは日本侵略を企んでいたようである．

2. 関数論（揺籃）

数学的には，オイラーの前にニュートン，ライプニッツ（関孝和も生年がほぼ同じ）がおり，後にはガウス，コーシー，ロバチェフスキー・ボリアイ，アーベル等がいる．例えば，巾級数はニュートン，テイラー等により得られていた．従って解析関数というものはオイラーの時代には在ったと言ってよいであろう．オイラーが導入した新しいテーマは独立変数として複素数を使うという点がまず第一に挙げられる．1748 年その著『無限小解析の第 1 巻』において「変数の値としては “0” や “虚数” さえも許される.」と強調している．18 世紀中葉までに初等関数論，つまり複素変数 z の指数関数 e^z，三角関数 $\sin z, \cos z, \ldots$ 等の理論は，オイラーにより完成された．さらに Γ（ガンマ）関数，ζ（ゼータ）関数などの超越関数も得ている．

ダランベールは，流体の解析から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

という方程式を初めて得た．その後，オイラーは複素変数 $z = x + iy$ の複素解析関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ の実部 u と虚部 v の関係式と捉えた．つまりこれは**ダランベール・オイラーの方程式**と言っても良いものかも知れないが，後年**コーシー・リーマンの方程式**と呼ばれるようになる．

このようにオイラーの関数論における仕事は，その揺籃期にあると言って良い．色々な基本的で重要な複素関数が定まり，何が対象か，何が問題かが徐々に形を作り始めていた時期である．色々な超越関数が現れてきてはいるけれども，未だ多項式関数の零点もあるかどうか分かっていない，未だ線積分の概念もない時代であった．

3. 関数論（基礎付け・確立）

オイラーの複素関数についての揺籃的仕事を受け，関数論の基礎付けはコーシー（1789〜1857），ワイエルストラース（1815〜1864），リーマン（1826〜1866）等によって成される．コーシーは，“線積分”の概念を得て，次の定理を証明した．

定理 1.（コーシーの積分定理）正則関数 $f(z)$ と然るべき条件を満たす曲線 C に対し

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

但し，a は C で囲まれる内部の点である．

大学学部の数学コース・関数論あるいは複素解析では，まずこれを学ぶ．この定理は，これができればもう何でもできるという感じになる．そして実際そうなのであって，そのくらいにこのコーシーの積分定理の含む所は深く広いのである．多分その当時の数学者たちもそのように感じてたのではなかろうか．

このような幸せな理解の発展過程を複素関数論は，後年再び経験することになる．それは，オスグード，クザン，ハルトークス，レビ等に始まり岡潔の連接定理・基本定理で一つの頂点を極める多変数関数論の出現と発展である．これについては，後の 6 節で言及する．

4. 単位円周の長さ 2π は定義か結果か？

円周率という言葉は，大変簡潔で素晴らしい．他の言語では，英語では the ratio of the circumference of a circle to its diameter．訳せば「円周の直径に対する比率」と単語にはなってなく説明である．独語では das Zahlenverhältnis des Kreisumfang zum Durchmesser，仏語では le rapport entre la circonférence d'un cercle quelconque et son diamétre と大差ない．ラテン語ではどうかと言うと，quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveiet circumferentia つまり「ある量で，直径に掛ければ円周の長さになるようなもの」という説明である．

通常，**角度**に関しては“何度”という表し方を初めに習う．1 直角=90°，2 直角=180° という表し方である．次に高等学校で**弧度法**（**ラディアン**）を習う．これは，図 1 のような角 ∡ を表すのに単位円周弧の長さ θ（実数）を用いるというものである．そして 1 直角 $= \pi/2$ と習う．さて次に，曲線の長さを習う．閉区間 $[a,b]$ 上の連続微分可能な曲線

$$C:\ t \in [a,b] \to (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$$

の長さ $L(C)$ は，次式で与えられる．

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\,dt.$$

単位円周 $C(1)$ は，

$$t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2$$

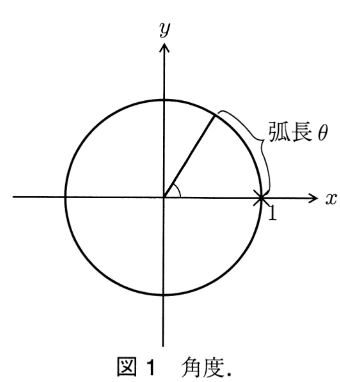


図 1　角度．

とパラメーター表示されるので，その長さは，

$$L(C(1)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\cos t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\sin t}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \quad (2)$$

これは，4 直角は 2π ということを言っているのだが，何かおかしいことに読者は気づくであろう．未だ曲線の長さが定義されていないのに弧長が使われている．そもそも何で弧度法が必要なのか？この辺の考察が歴史的にどのように行われたのかについて筆者はあまりよく知らない．一方，三角関数について次のテイラー展開は有名である．

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots. \quad (3)$$

ここには x^2, x^3 という項が現れる．角度を何度と表していたのでは $x = 10°$ としたとき，$x^2 = (10°)^2, x^3 = (10°)^3$ は何を意味するのか分からなくなる．x が実数ならば x^2, x^3 は実数であり何の問題もない．

このような次第で，事態はかなり混乱気味であり，上述のように“角度”を記述するのは種々問題があることがお分かりいただけたと思う．では，どのようにすればよいのか．

実数論に基づこう．実数の全体 $\mathbf{R}$ では極限を考えることができ，級数の収束や絶対収束の概念が確立されている．この性質は，複素数 $\mathbf{C}$ にも引き継がれている．このことから任意の複素数 $z \in \mathbf{C}$ に対し

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (4)$$

と定義する．これが，実数 $z = x \in \mathbf{R}$ に対し実数の中で定義された巾乗 e^x に一致することは別途確かめられる．するともう一つの複素数 $w \in \mathbf{C}$ に対してコーシー積というものをとることにより，

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^z \times e^w \quad (5)$$

が成立することが分かる．一方，

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (6)$$

と定義するのである．つまり，(3) を cos, sin の定義と見るのである．この定義と (5) より

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = e^{iz-iz} = e^0 = 1 \quad (7)$$

が分かる．$z = i\theta, w = i\varphi \ (\theta, \varphi \in \mathbf{R})$ とおくと (5) の実部と虚部を比較することで

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \quad \sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \quad (8)$$

という加法公式が従う．定義により

$$\cos 0 = 1. \quad (9)$$

(3) の第 3 項までの計算（＋アルファ）で

$$\cos 2 < -1/3. \quad (10)$$

が分かる．定義から $\cos\theta$ は連続であるから，**中間値の定理**より $\cos\theta$ は，開区間 $(0, 2)$ で零点を持つ．さらに (8) と (3) を使うことにより $\cos\theta$ は，$(0, 2)$ で強義単調減少であることが出る．よって，$\cos\theta$ は，$(0, 2)$ でただ一つの零点 ω_0 を持つことになる．$\pi = 2\omega_0$ とおく（π の定義）．再び (8) を使うと $\cos\theta, \sin\theta$ は 2π を基本周期とする周期関数であることが従う．これ等のことと (7) を合わせると，パラメーター表示

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \quad (11)$$

は単位円周をちょうど 1 対 1 に表していることが分かり，従って (2) の計算が正当化されたことになる．

定理 2. 単位円周の長さは 2π である．

以上詳しくは，拙著[2)]第 2 章 5 節を参照されたい．

5. 神話と数学

本誌「数理科学」に“神話”の話とは！と，早まらずに聞いてほしい．世界には至る所に神話がある．特に，文化・文明社会で神話を持たないものというのはまず考えられない．しかし，**宇宙創生から始まり人の世までを一つの流れとして編纂・記述された神話**をもつ文化・文明はそうたくさんはない[*1)]．そのようなものの一つに日本の“記紀

*1) ちなみに，お隣のシナ大陸や朝鮮半島にそのようなものは，専門ではないが聞いたことはない．

神話” がある．『古事記』（712 年）と『日本書紀』（720 年）である．

「神話というものはよく分からないことをいい加減に言い伝え，書き連ねたものである」とよく言われる．対してとなるかどうかはともかくとして，「数学」は言葉の定義が公理や公準によりしっかりなされ，そこから論理により正確に誤謬なく展開される理論であると言われる．なるほど，現在できあがったものを読んでみればそのように思うのも尤もであるが，しかしこの両者の関係はそう簡単に言い切れるものであろうか．

前節で概観したように，“角度” という概念を捉えるのにいかに紆余曲折があったかが分かる．多項式の零点についての代数学の基本定理にしてもガウスは生涯に 4 度証明を与えたという．つまり，かのガウスでさえなかなか “なるほど分かった” とならなかったのである．関数論という分野にとってオイラーからガウスの時代は，未だ複素数，複素変数の概念が定まり切らず，しかし色々な解析関数や数学事象が現れ，それらを捉えよう，何とか理解しようとする営みがなされていた揺籃期であった．

『古事記』で言えば「上つ巻」に相当する．これは，高天の原に天之御中主神（あめのみなかぬしのかみ），高産巣日神（たかむすひのかみ），神産巣日神（かみむすひのかみ）の三神が現れ，みな独り神で（男女対偶でない，つまりそれ以前），直ぐにふっと消えてしまうが存在はするという処から始まり，神武天皇の前までである．これを数学の初めとして述べれば，「天地（あめつち）初めて発（ひら）けし時，高天の原に成れる神の名は，**空**之御中主神（そらのみなかぬしのかみ）．次に**点**産巣日神（てんむすひのかみ）．次に**数**産巣日神（かずむすひのかみ）．この三柱の神は，みな独神（ひとりがみ）と成り座して，身を隠したまひき．」となる．このように何かが現れ存在はするようになるが，未だ姿・形が定まらず言葉も定まっていない原初の様子の記述から始まる．初めは何かあることが分かっていてもなかなか捉えることができない．しかし捉えようとする努力・営みを続けていると次第にその姿・形が現れ，言葉が与えられて定まってゆく．それによって理解がなされ，するとまた後ろからよく分からない事象の姿・形がほのかに現れてくる．

オイラーが「変数の値としては，0 や虚数さえも許す」と言ってはみたものの，コーシーでさえ正則関数 $f(z)$ を実際考えるときは，$z = x + iy$ とし x, y の 2 変数の関数と見ていたという．複素数の捉え方に関してコーシーは生涯を通じて変化し続けた．今，我々は $f(z)$ を 1 変数 $z \in \mathbf{C}$ の関数と見ることに何の障壁も感じない．しかしこの認識の壁が破られるのには多くの人の**言語記述**（後述 7 節で言うところの第一言語記述）による営みと時間がかかっているのである．

複素関数論は，その後コーシー，リーマン，ワイエルストラスと『古事記』で言えば「中つ巻」の時代に入ってゆく．一般的な正則関数を対象とする “関数論” が独り立ちするのは，ピカールの定理以降であるとされる．これは，いわば「下つ巻」に相当するのであろう．

このように見るとき，“**原初より一つの流れとして編纂された神話**”[*2] は，例えば『古事記』は，何か不確かないい加減なことが書き連ねてあるということでではなく，そのよく分からない，しかし確かにそこに存在するものを捉え言葉を与えて姿・形を定め理解するという人間の営みの記録があると見るべきである．つまり，その過程で言葉が定まり，そして分かるということはどういうことかが記されている．その意味で，数学もその神話の記述形式に即したときに，“分かる” ということを感得できるのであると私は思う．神話は，決していい加減なことを書き連ねているのではなく，我々が分かるとはどういうことかのプロトタイプを与えているのである（それが，神話のすべてということを言っているのではない．念のため）．

（この節，『古事記』[5]，小林[6] を参照．）

*2） この意味で考えると『日本書紀』よりも『古事記』のほうが優れている．

6. 岡の三連接定理

さて複素関数論はピカールの定理により一般に正則関数というものを対象に展開する理論として自立し発展してゆくのであるが，先に述べたようにオイラー–ガウスの時代の揺籃期を再び経験するときが来る．多変数の正則関数 $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ についてワイエルストラスは，1 変数の場合と大差ないと考えていたそうである．にも関わらず，ファブリ，ハルトークスやレビ等により，そうはゆかない事象が次第に見つかってきた[9]．それらは，$\mathbf{C}^n$ の正則領域上のクザンI問題，クザンII問題，そして擬凸領域は正則領域かを問うレビ問題（ハルトークスの逆問題）として姿・形が整えられた．1936年～1953年にかけ**岡潔**（1901～1978）は，これら3つの問題を順次解いていった．その過程の中で複素関数論あるいは複素解析学における新しい真に本質的なものが姿・形を現してきた．それは，岡潔が**不定域イデアル擬基底の有限性**と呼び，後H. カルタンが**連接性**（cohérent）と呼んだ**岡の連接定理**である．岡は次の3つの連接定理を証明した．

定理 3. （岡の三連接定理）

(i) （岡の第1連接定理）$\mathbf{C}^n$ の正則関数の芽の層 $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ は連接である．（第VII論文[8]）

(ii) （岡の第2連接定理）解析的集合のイデアル層は連接である．（第VIII論文[8]）

(iii) （岡の第3連接定理）解析的集合 A の構造層 $\mathcal{O}_A$ の正規化層は連接である．（第VIII論文[8]）

この中で最も重要なのは，第1連接定理であるので，その説明を試みよう．まず $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ とは次のように定められる．各点 $a = (a_j)_{1 \le j \le n} \in \mathbf{C}^n$ の周りで収束している巾級数（つまり正則関数）

$$f_a(z) = \sum_{k_j \ge 0} c_{k_1 \cdots k_n} \prod_{j=1}^{n} (z_j - a_j)^{k_j}$$

の全体を $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,a}$ と書く．これは，環の構造をもつ．$a \in \mathbf{C}^n$ も動かしてその全体を



岡潔博士.

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n} = \bigcup_{a \in \mathbf{C}^n} \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,a}$$

とおく．点 $a \in \mathbf{C}^n$ の開近傍 Ω 上で，有限個の正則関数 $F_1, \ldots, F_N$ を考える．$\mathcal{O}_\Omega = \bigcup_{z \in \Omega} \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,z}$ とおく．任意の点 $z \in \Omega$ で F_ν は収束巾級数展開されるので $F_{\nu z} \in \mathcal{O}_{\Omega,z}$ が定まる．そこで $(f_{\nu z}) \in (\mathcal{O}_{\Omega,z})^N$ に対し次の一次関係式を考える．

$$f_{1z}F_{1z} + \cdots + f_{Nz}F_{Nz} = 0, \quad z \in \Omega. \quad (12)$$

この解 $(f_{\nu z})$ の全体を $\mathcal{F}_{\Omega,z}$ と書き，$z \in \Omega$ も動かした全体を $\mathcal{F}_\Omega$ と書く．

定理 4. （岡の第1連接定理）一次関係式 (12) が与えられているとする．すると a の近傍 $U(\subset \Omega)$ とその上の正則関数の有限個の組 $g_\lambda = (g_{\lambda\nu})_{1 \le \nu \le N}, 1 \le \lambda \le L$ が存在して次の性質を満たす．

(i) 任意の $z \in U$ で，$g_{\lambda z} = (g_{\lambda\nu z}) \in \mathcal{F}_{\Omega,z}$ が成立する．

(ii) 任意の $z \in U$ と任意の $f \in \mathcal{F}_{\Omega,z}$ に対し，ある $h_\lambda \in \mathcal{O}_{U,z}, 1 \le \lambda \le L$ が存在して $f = \sum_{\lambda=1}^{L} h_\lambda g_\lambda$ と線形和で書き表せる．

大事な点は，*(ii)* の f は，a で定義されていなくともよいことである（図2参照）．点 a だけで (12) を考えるのならば，この有限性は $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,a}$ がネーター環である（ワイエルストラスの予備定理による）ことからの直接的な帰結である．**連接性**とは，このような定義されているところを定めな

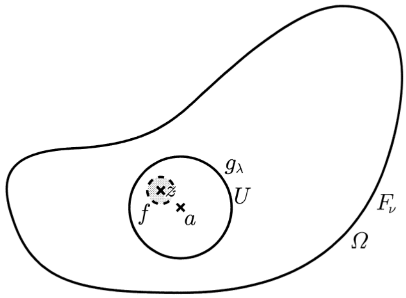


図 2　連接性近傍.

い（**不定域な**）一次関係 (12) に関する**局所的な有限生成性**のことである.

この連接性の概念は，その定義を見る限り，クザン I, II 問題，レビ問題には全く現れていない．岡潔は，この三大問題を解いてゆく過程においてその背後にあるより本質的な“何か”を捉え姿・形を見定め言葉を与え，ついには然るべき事象があると証明したのである*3)．岡の三連接定理の結果として，次がある．

定理 5.（岡–カルタンの基本定理）X をスタイン空間，$\mathcal{S}$ をその上の連接層とすると，1 次以上のコホモロジーは消える．

$$H^q(X,\mathcal{S})=0, \quad q \geqq 1.$$

詳細はさておき，この基本定理 5 は，もうこの定理さえあれば何でもできるという感じになる．あのコーシーの積分定理 1 に似た感覚を人に与える．関数論において，このような感覚を与える結果として岡–カルタンの基本定理 5 は，コーシーの積分定理以来のものであると思う．

例えば，X 上の離散点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ と複素数列 $\alpha_\nu \in \mathbf{C}, \nu=1,2,\ldots$ を任意に与えたとき，X 上の正則関数 f で，すべての ν に対し，$f(x_\nu)=\alpha_\nu$ を満たすものの存在が直ちに従う．

以上，詳しいことは述べられないが（一松[3]，西野[4] を参照されたい），この岡の三連接定理 3 とコホモロジー理論の組合せは，動機となった三大問題（クザン I, II 問題，レビ問題）の証明を与えるのみならず，複素関数論をさらに深く広く導いてゆくことになったのである．

7. 言語と創造性について

最後に言語記述表現について思うところを記してみたい．言語記述は，それにより得られた理解が時空を超えるという点で非常に重要である．よく知られているようにオイラー，ガウスの著作はほとんどラテン語で記されている．当時の学問の国際言語はラテン語であった．しかし，リーマン，ワイエルストラスとなるともはやラテン語は使われずに著作はドイツ語のみが使われるようになる．フランスでは，デカルト以来科学の学術著作はすべてフランス語が用いられる．コーシーは勿論すべて論文をフランス語で書いた．土地のそれぞれの日常言語が使われるようになり，数学が社会の中に溶け込み定着し，**創造性**が急激に高まっていったのである．

家庭の中で使われる言葉を「**第一言語**」，属する社会で使われている言語を「**第二言語**」，その外の言語を「**第三言語**」と呼ぶことにすれば，ラテン語は第三言語である．まだよく分からない事象を捉え，姿・形を次第に明らかにしながらついに言葉による定義を与えるという創造の営みを第三言語で行うのはオイラーやガウスのような大天才を除いて致難の業であろう．それでも，その部分で相当なエネルギーを取られる．また，成果がいかに素晴らしくとも第三言語のままではその属する社会の中にそれが受容されてゆくことはなかなか困難であろう．既に分かっている事柄ならば第何言語でも習得してしまえば表現するに本質的困難はない．しかし創造は，違うのである．先の『古事記』の場合は，序文は“漢文”で書かれ，本文は漢字による「日本語表記」になっている．序文にはその苦労話が太安万侶により記されているのは興味深い．現在，第一言語で初等教育から高等教育・最先端科学まで記述できる国・社会の数はそう多くはない．

現在我が国では，大学も含めて国際化という流

*3)　この様子については第 VII 論文[8] の序文が興味深いので参照されたい．奈良女子大学付属図書館のウェッブページ「岡潔文庫」には，西野利雄博士による和訳がある．



太安万侶の墓.

れの中で，英語教育，英語による教育が強調され教育予算も獲得しやすいので今や草木も英語になびく様相である．しかしそのような流れに身を任せていて本当に良いのであろうか？ **英語**は，日本の中で **“第三言語”** である．短期的には，経済的（金銭的）に確かに効用があるであろう．しかしそのとき，我々は最も大切な“創造性”というものを失ってしまうのではないかと思う．この節の初めに見たように，**第一言語による記述は創造性の大切な要素**である．16 世紀以来，マニラ，マカオ，香港ではそれぞれ，その時代の国際言語であったスペイン語，ポルトガル語，英語を使っていた．さて，その結果はどうだったのか，日本の場合と照らし考えてほしい．

（この節については，小林[6]を参照.）

注. 本稿ではいちいち断らなかったが，全体的に文献 1) を参照した.

参考文献

1) A.N. コルモゴロフ他編／小林昭七監訳，『19 世紀の数学 II—幾何学・解析関数論—』朝倉書店，2008.

2) 野口潤次郎著，『複素解析概論』裳華房，1993.

3) 一松信著，『多変数解析函数論』培風館，1960.

4) 西野利雄著，『多変数函数論』東京大学出版会，1996.

5) 倉野憲司校注，『古事記』岩波文庫 黄 1–1，岩波書店，1963.

6) 小林秀雄著，『本居宣長』新潮社，1977.

7) 児玉幸多編，『日本史年表・地図』吉川弘文館，1955.

8) Kiyoshi Oka*4), Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables:

I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles,
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A **6** (1936), 245–255 *[Rec. 1 mai 1936]*.

II Domaines d'holomorphie,
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A **7** (1937), 115–130 *[Rec. 10 déc 1936]*.

III Deuxieme problème de Cousin,
J. Sci. Hiroshima Univ. **9** (1939), 7–19 *[Rec. 20 jan 1938]*.

IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes,
Jpn. J. Math. **17** (1941), 517–521 *[Rec. 27 mar 1940]*.

V L'intégrale de Cauchy,
Jpn. J. Math. **17** (1941), 523–531 *[Rec. 27 mar 1940]*.

VI Domaines pseudoconvexes.
Tôhoku Math. J. **49** (1942(+43)), 15–52 *[Rec. 25 oct 1941]*.

VII Sur quelques notions arithmétiques,
Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 1–27 *[Rec. 15 oct 1948]*.

VIII Lemme fondamental,
J. Math. Soc. Japan **3** (1951) No. 1, 204–214; No. 2, 259–278 *[Rec. 15 mar 1951]*.

IX Domaines finis sans point critique intérieur,
Jpn. J. Math. **23** (1953), 97–155 *[Rec. 20 oct 1953]*.

X Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes,
Jpn. J. Math. **32** (1962), 1–12 *[Rec. 20 sep 1962]*.

[34] Note sur les familles de fonctions multiformes etc.,
J. Sci. Hiroshima Univ. **4** (1934), 93–98 *[Rec. 20 jan 1934]*.

[41] Sur les domaines pseudoconvexes,
Proc. of the Imperial Academy, Tokyo (1941), 7–10 *[Comm. 13 jan 1941]*.

[49] Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,
Kōdai Math. Sem. Rep. (1949), no.5–6, 15–18 *[Rec. 19 déc 1949]*.

9) 岡潔，「多変数解析函数について」（講演録），京都大学基礎物理学研究所：岡潔文庫 http://www.lib.nara-wu.ac.jp/oka/fram/mi.html

（のぐち・じゅんじろう，東京大学大学院数理科学研究科）

---

*4) 現在，岡潔博士の出版物の正確な記録を纏めて見出すのは不可能な状態にある．世界的に最も頻繁に引用されるのは，“*Kiyoshi Oka Collected Papers, translated by R. Narasimhan, commentaries by H. Cartan*”, edited by R. Remmert, Springer-Verlag, (1984) であるが，記録に誤りがある他にもっと重要なこととしてすべての論文の受理日が消去されてしまっている．岩波書店出版の全集，岡潔文庫（奈良女子大学付属図書館ウェッブ）もあるが，数は少ないがやはり誤りがある．そのようなわけで，ここに完全な記録を記載するのは，興味ある読者に役立つことと考える．

オイラーと位相幾何，組合せ理論

量に依らない幾何学の始まり



佐藤　肇

1. はじめに

オイラーの 900 近い論文の中で，幾何学に関するものは 10% を超えるくらいで，それほど多くはない．その中には，伝統的なギリシャから伝わる平面幾何学の大きな発見などがある．しかし最も驚愕することは，オイラー自身が強調しているように，長い間誰も目を向けず結果もなかったところに，具体的な問題を通して新しい幾何学の創造を行ったことである．

それらは，ケーニヒスベルクの散歩の問題，立体の点，辺，面の数に関する公式，魔方陣，座席表の決定問題などである．最後の問題は，いまはやりの数独ゲームにつながるものである．

これらは，一見暇な人を相手にする単純なクイズのようであり，その解き方にも深いものが隠れているとは思えない．にも関わらず，その後世紀を超えて，グラフ理論，位相幾何学，組合せ理論などと大きく発展する．そして，それらはこれから先どうなるかが誰にも予想できないような数学の分野となっている．

ここで気がつくことは，オイラーは，このような新しい深い分野のきっかけとなる単純な問題を解いているが，その方法は必ずしも明快で整然としているとはいえないことである．いずれも，時代が経ってから初めて，はっきりとした理論が現れて，誰でもとっつきやすい説明が得られるようになる．これは，人間の頭の中で未開拓の研究を始めることが，いかに難しいことかを示しているのではないだろうか．動物が道具を使ったり，火を使うことなどを知るのには，膨大な時間を必要とした．それと同じように，今我々の思考方法も，前の人間たちが積み上げげたものから，少しでもはみ出すことが，いかに難しいかを示していると思われる．始まりは常に混沌である．

数学教師は，学生が問題を解くにあたって，公式を使うことしかできず，応用問題に対しては自分で考えることがないと嘆いたりする．実際は，教師が，応用の仕方を以前に何処かで学んだり聞いたりしたことがあって，それが普通だと考えているにすぎないであろう．

以下で，上のオイラーの考えた問題とその解法について，原典にあたりながら解説してみようと思う．

2. ケーニヒスベルク 7 つの橋—位置解析

1736 年にオイラーは

“位置の幾何に関連するある問題の解決”

というラテン語の論文を書いた．出版は数年遅れたが，その論文でケーニヒスベルクの橋の問題を解決した．

Eneström 数 53 のこの論文は（ラテン語の論文であるが，2 つの英訳が知られている[1,6]）次の文章で始まっている．

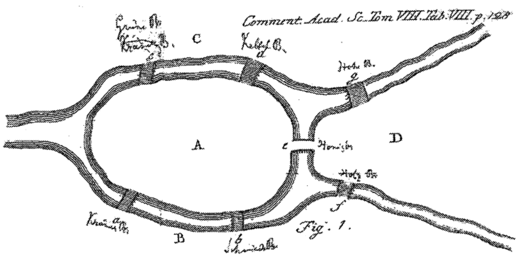
「数量に関係する幾何学の分野は，これまでに熱心に研究されてきた．しかし，今までほとんど知られていない他の分野がある．それはライプニッツが最初に**位置の幾何**と名付けたものである．この幾何学の分野は，位置の関係のみに関するもので，数量には無関係である．したがって，大きさの計算はしない．この位置の幾何に属する問題の定義やそれを解く方法には，これまで満足できるものがなかった．最近，確かに幾何の問題であるにも関わらず，数量の決定を必要とせず，よって大きさの計算では解くことのできない問題が発表された．…… この論文で，この問題を解くための私の発見した方法を報告しよう．それは，位置の幾何の例となるであろう」

2.1 散歩の問題

この問題は次のようなものである．

プロイセンの都市ケーニヒスベルク（現カリーニングラード）には，プレゲル川が流れていて，それに取り囲まれる島が4つある．川には7つの橋が架かっている．

論文[14]には次の図が書かれている．



ケーニヒスベルクの人々は，それらの橋をいくつか渡って散歩をするのが習慣であった．そこで問題になったのは，すべての7つの橋を通る，それもただ1回だけ通るようなルートは存在するか？ということである．いろいろ試行するとどうも不可能のようである．しかし本当に不可能であることを示せるか．

オイラーはこの問題の解を与えて，さらに一般の形の“島と橋の問題”の解法を問題とした．

2.2 オイラーの解法

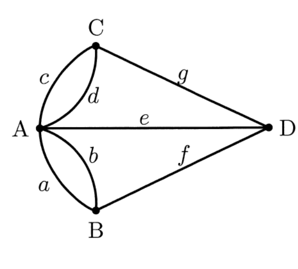
この問題を，島を点で表し，橋をそれらをつなぐ線としてグラフの問題と捉えるのは後世のことである．オイラーは次のような方法で，橋を1回だけ必ず通る道は存在しないことを示した．

4つの島を A, B, C, D とするとき，島にはそれぞれ 5, 3, 3, 3 本の橋が架かっている．今，橋を渡って A の島から B の島に行くルートを選ぶとき，どの橋を通るかは考えずに AB と書く．このようにして，島々を回る道を A, B, C, D の文字のつながりで表す．このとき，すべての橋を1回ずつ通るルートでは，B の文字は，橋が3本架かっているから，2回現れる．同様に C, D も2回現れる．A の文字は，橋が5本架かっているから，3回現れる．よって，そのルートでは，A, B, C, D の文字は，あわせて $3+2\times 3=9$ 回現れる．これらの文字の間は橋を通るので，9個の文字をつなぐ橋は8本必要となる．これは，7本の橋を1回だけ通るという条件に矛盾する．

ケーニヒスベルクの橋の問題では，各島に架かっている橋の数はすべて奇数であったが，そうでない島と橋の問題にも同じような議論ができることをオイラーは述べている．ただし，オイラーは，すべての橋を1回だけ必ず通る道の存在のための必要十分条件をはっきりとは明示していない．

2.3 グラフ理論

ケーニヒスベルクの橋の問題は，後には，島を点として橋を線（辺と呼ばれる）でつないだ，次のグラフ



に，各辺を1度必ず通る道が存在するか，という問題と捉えるようになった．ここでグラフ理論のいくつかの言葉を説明しよう．

グラフとは，いくつかの点と線の集まりで，線は，その中の2つの点を結んでいるとする．この点，線をそれぞれグラフの**頂点**，**辺**という．グラフの中の頂点が，順に辺でつながっているとき，その頂点と辺をその順に並べたものを**歩道**という．特

に歩道の頂点がすべて異なっているとき**道**と呼ばれ，歩道の辺がすべて異なっているとき**小道**と呼ばれる．小道で，最初の頂点と最後の頂点が等しいものを**回路**という．また，歩道で，最初の頂点と最後の頂点が等しく，他の頂点はすべて互いに異なっているものを**閉路**という．

グラフのすべての辺を含む小道を**オイラー小道**といい，グラフのすべての辺を含む回路を**オイラー回路**という．ケーニヒスベルクの橋の問題は，オイラー回路の存在問題と等しい．また，これは筆を離さずに1度で書けるかという，「一筆書きの問題」ということもできる．

グラフの勝手な2つの頂点をつなぐ道が存在するとき，そのグラフは**連結**であるという．頂点とつながっている辺の個数を，その頂点の**次数**という．上の例では，頂点 A の次数は 5，頂点 B, C, D の次数は 3 である．

オイラーの議論を整理し，次の明快な定理が成立することが示された．

定理．連結なグラフがオイラー回路を持つための必要十分条件は，すべての頂点の次数が偶数になることである．連結なグラフがオイラー小道を持つための必要十分条件は，次数が奇数となる頂点の個数が2以下であることである．

すべての頂点の次数の和は，辺の数の2倍であるから偶数である．従って次数が奇数となる頂点がただ1個ということはない．次数が奇数となる頂点が2個の場合，その一方を始点とし，他方を終点とするオイラー小道が存在する．

グラフ理論は，コンピューターネットワーク，化学の分子構造，土木工学，統計学などと，近年その応用はとどまることをしらない．

3. 多面体公式—多様体の代数的位相幾何

1750 年 11 月 14 日にオイラーはいつものようにゴールドバッハに手紙を書いた．文献 12), p.9 に直筆の写真がある（“タービンについて書かれたもの” とあるキャプションは間違い）．そこには，次のことに気がついたと書かれている．「立体幾何学での点と面の数の和は，辺の数に 2 を加えたものに等しい」今まで誰も気づかなかったようなのは，驚くべきことだと述べている．

そのときは，まだ証明は完成はしていなかったようであるが，1752 年にまず，いくつかの立体の例を確かめる論文を書き，さらに同じ年にその証明を与えた論文を書いた．

その2つ目の論文は，Eneström 数 231 の “平面で囲まれた立体の持つ顕著な性質の証明” という題のものである．この論文のはじめには，次のような高揚した文章が載っている．

「平面の多角形の形については，角の数と辺の数は等しい，また内角の和は，直角に辺の数を2倍したものから4を引いた数を掛けたものに等しいなど，いままでの幾何学でその性質は良く調べられている．私は最近，立体幾何の最初の原理を概説した．それには，平面で囲まれた立体について上と同じような性質が含まれている．

すべての面が平面による対象を考えることが，平面幾何と同様に意味があり，幾何学と呼べるだろう． ...... 立体幾何学は何世紀にもわたって幾何学として扱われてきたのに，この最初の原理が，今まで知られていなかったのは，本当に驚きである．そのような長い間，この問題を誰も考えようとはしなかった」

そして，それ自体が多くを含んでいる次の命題を得たと書いた．

「すべての平面で囲まれた立体において，立体角（頂点の意）の数 S と面の数 H の和は，辺の数 A より 2 だけ多い：$S+H=A+2$」

この式を**オイラーの多面体公式**という．これは，ある知的な雑誌のアンケートによると，世の中の美しい数学の定理のランキングで2位を得た（1位はオイラーの等式 $e^{i\pi}+1=0$）そうである．

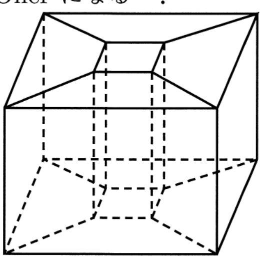
3.1 オイラーの証明（正しいのか？）

オイラーの論文では，まず，対象とする立体がどういうものかをはっきりとは，定義していない．

平面で囲まれている立体としか言っていない．

例えば，立方体の羊羹の中心に，上から断面が四角形の割り箸を突き刺して，そこを繰り抜いた残りを考えると，それは，ドーナツと位相同型であって平面で囲まれた立体となる．この上面と下の面は，回の文字の内側が詰まった形である．この2つの面には，それぞれ4本の辺を加えて，4枚の台形の面が，回の文字の内側を覆っているとする．この立体に対し，$S=16$, $H=16$, $A=32$ と数えられ，$S+H=A$ となってしまう．

なお，オイラーの公式が成立しない多面体が存在することを最初に指摘したのは，19世紀始めのスイスの数学者 Lhuilier であった．彼の名前を英語で書くと Oiler になる[10]．



オイラーはなにも言及していないが，この立体はさらに凸であるという条件をつける必要があり，議論の途中では，それを暗に仮定しているようである．

証明のやり方は，立体の角を削って，小さな単純なものに順次変えていくことを行う．その操作で，$S+H-A$ は変化しないことを示し，単純な正4面体に対して成立していることにより，すべての凸な立体に対しても成立するとする．

この証明の途中で，立体がつぶれて，立体でなくなったり，ちぎれて2つになったりするから証明は間違いではないかという意見もあったが，立体の削り方をうまく規定することにより，その欠陥は回避できるという[10]．

3.2 近代的な説明

オイラーより80年遅れて生まれたコーシーは（オイラーに次ぐ多産の数学者）は凸多面体の公式を明快なアイデアで証明した．その方法では，凸多面体の内部に光源を取り，天空にサーチライトで射影して考える．天空に頂点は点に，辺が線として写し出され，その線で囲まれているのが面である．天球から1枚の面の像の内部の円板を取り除くと，残りは平面と同じ（同相）で，そこに頂点と辺の像によるグラフが描かれていることになる．この平面グラフに対する公式の証明は，頂点を一つずつ消していくと，$S+H-A$ の値は変わらずに，図形が次第に単純になっていくことを見るのはやさしい．最後には，2点とそれをつなぐ1個の線が残り，面はその外全体で1枚であるから，$S=2$, $H=1$, $A=1$ となり $S+H-A=2$ となる（詳しくは例えば文献12)）．

3.3 デカルトは知っていたのか

実はオイラーの多面体公式は，100年以上も前にデカルトにより発見されていたという説がある[9]．デカルトが1630年頃に多面体について書いたノートがあった．それは，結局出版されなかったが，ライプニッツが1670年代にパリに行き，そのノートをコピーした．そのコピーも200年近くの間埋もれていたが，1860年頃にそれが見つかったという．

そのノートに書かれていることは，面角数のすべての面に対する和は，$2S+2V-4$ に等しいというものである．面角数の和は，辺の数の2倍であるから，この式を2で割るとオイラーの多面体公式が出る．

デカルトの示したことは，外角の和を計算するという，ギリシャ以来の幾何学の方法であった．それは，距離の固定された立体の幾何学の結果である．デカルトの結果は，曲面の曲率の積分に関するガウス・ボンネの定理へと拡張された．この定理は微分幾何学の重要な基本定理である．しかし，オイラーは，多面体の頂点，辺，面の個数のみから抽出される定理を考えた．これは思考の飛躍としては稀有のことで，デカルトにはその飛躍はなかったといえるであろう．

3.4 現代数学での拡張

現代数学では多面体を高次元まで拡張して考える．頂点，辺，面をそれぞれ0,1,2次元の**単体**と呼ぶ．さらに，3次元の単体は中身の詰まった4面体とする．このようにして，次元のさらに高い

単体も考えられる．一つの単体は，より次元の低い単体を境界に含んでいる．n 次元の単体の境界には，k $(k \leq n)$ 次元の単体が ${}_{n+1}C_{k+1}$ 個含まれている．これらの境界の単体は，n 次元の単体の**顔**と呼ばれる．いろいろな次元の単体の集合で，各単体の顔が，その集合に必ず含まれているとき，その単体の集合を**単体的複体**という．単体的複体が高次元の多面体を表現していると考える．

K を単体的複体とし．単体の数は有限個のものだけを考えるとき，K の**オイラー特性数** $\chi(K)$ を

$$\chi(K) = \sum_i (-1)^i \{i \text{ 次元の単体の数 }\}$$

と定義する．

距離が変わっても連続的な変形だけをされた空間は元の空間と**同相**であるといわれる．

同相な空間は同じものと考える位相幾何学は19世紀の終わりから20世紀にかけて，ポアンカレにより確立された．オイラーの特性数は，多面体が同相ならば変わらないという位相不変量であることが示された．この特性数は，位相幾何学の最も基本的な量である．アチヤ・シンガーの指数も微分作用素に拡張されたオイラー特性数であり，数理物理学などで重要な働きをしている．

なめらかな多様体 M も，三角形分割することにより，多面体と考えることができて，$\chi(M)$ が定義される．

3.5 オイラー特性数に関する未解決問題

1) チャーンの予想[2)]

（n 次元）多様体で，その局所座標変換がすべて $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換の制限になるような座標近傍を取れるとき，アファイン平坦な多様体であるという．

予想： アファイン平坦な閉じた多様体のオイラー特性数は 0 である．

アファイン変換が，等距離変換の定数倍になっている時，相似変換という．アファイン平坦多様体がその局所座標変換がすべて相似変換となるような座標近傍を取れるとき，相似平坦多様体という．

「相似平坦な閉じた多様体のオイラー特性数は 0 である」．

は，証明されたが，一般的なアファイン平坦の場合の予想は，4 次元以上に対してはまだ示されていない．

2) ホップの予想—正曲率[4, 7)]

予想： 偶数次元の正（非負）の曲率をもつ閉じた多様体のオイラー特性数は正（非負）である．

3) ホップの予想—負曲率

予想： 偶数 (=$2n$) 次元の非正の曲率をもつ閉じた多様体のオイラー特性数 $\chi(M)$ は

$$(-1)^n \chi(M) \geq 0 \qquad (1)$$

を満たす．

例えば，M を負の定曲率をもつ 2 次元閉曲面とすると $\chi(M) < 0$ である．M の n 個の積 $M^{\times n} = M \times \cdots \times M$ に積計量を入れると，非正の曲率をもつ閉じた $2n$ 次元多様体となる．$\chi(M^{\times n}) = \chi(M)^n$ だから $(-1)^n \chi(M^{\times n}) = (-\chi(M))^n > 0$ である．

アダマール–カルタンの定理より，非正の曲率をもつ閉じた多様体の普遍被覆はユークリッド空間と微分同相である．従って非正の曲率をもつ閉じた多様体の 2 次元以上のホモトピー群がすべて 0 である．

4) 2 次元以上のホモトピー群がすべて 0 である多様体を **非球面（aspherical）** 多様体という．

予想： $2n$ 次元の閉非球面多様体 M のオイラー数 $\chi(M)$ は

$$(-1)^n \chi(M) \geq 0 \qquad (2)$$

を満たす．

滑らかな閉非球面多様体で，普遍被覆がユークリッド空間と微分同相でないものが知られている[3)]．そのようなものは，非正の曲率をもつリーマン計量が入らないから，4) の予想は 3) の予想より強い予想であり，逆にいえば，反例はつくりやすいかもしれない．

4. 魔方陣，数独の幾何

1782年に発表されたEneström 数 530 の
“魔方陣の新しい型の研究”
という彼の一番長い論文は次のように始まっている．

「人々の知性を悩ませている非常に奇妙な問題が，私を解析と組合せ論の新しい道を開くと思われる次の問題に向かわせた．それは，6つの異なる階級の6つの異なる地域出身の36人の将校を，どの行もどの列もすべて異なる人が居るように正方形に並べるという問題である．ずいぶん解くための努力をしたが，これは絶対不可能だと認めざるを得ない．しかしその厳密な証明はできない．」

その問題の解決のため，オイラーは，出身地を a, b, c, d, e, f とラテン文字で表し，階級を α, β, γ, δ, ϵ, ζ とギリシャ文字で書いた．問題は，6個のラテン文字だけを，それぞれ6回ずつ使い，どの行もどの列も異なるような正方形を作り，同じようにギリシャ文字についても正方形を作り，その2つを組み合わせて作った正方形の，36個のどの成分の組合せも，互いに異なっているようになるものを見つけることと言い変えることができる．

6を自然数 n に一般化して考える．n 個の文字を，それぞれ n 回ずつ使い，どの行もどの列も異なるような正方形を n 次の**ラテン方陣**と名付ける．これは，すべての $n\ (\geq 2)$ に対して存在し，その個数も n が増えるにつれ，非常にたくさんとなる．

クイズ 1：すべての $n\ (\geq 2)$ に対して一つで良いから n 次のラテン方陣を見つけよ．

2つの n 次のラテン方陣が，それを並べて書いた正方形に，すべての数の組合せ (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, が一つずつすべて現れるとき，その2つのラテン方陣の組を n 次の**グレコラテン方陣**という．

クイズ 2：すべての奇数 $n\ (\geq 3)$ に対してグレコラテン方陣を見つけよ（異なる2つのラテン方陣を見つけ，その組合せを調べる）．

このようにして，n が奇数の場合には，n 次のグレコラテン方陣は，すぐ見つかり，しかも異なるものがたくさん見つかる．

このグレコラテン方陣から，魔方陣をただちに作ることができる．n 次の**魔方陣**を次のように定義する．1から n^2 までの数を1つずつ n 次の正方形に入れたものが，どの行もどの列の和も同じ $\frac{(1+\cdots+n^2)}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$ になっているものとする（ここでは，対角線の和は考えない）．

クイズ 3：グレコラテン方陣から自然に魔方陣を構成せよ（グレコラテン方陣の正方形の各ます目には1から n までの数の2つの組が入っている．魔方陣正方形の各ます目には1から n^2 までの数が一つ入っている）．

それでは，n が偶数の場合に，n 次のグレコラテン方陣は作ることができるのだろうか？

$n = 4$ の場合には，次の3組のラテン方陣を考えると，そのどの2つの組合せもグレコラテン方陣を作ることがわかる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

オイラーはこれらをいろいろ工夫して作り上げたが，実は，50年ほど後にでき上がったガロア体（有限体）の理論と伝統的な射影幾何を組み合わせることにより明晰に理解できる（文献11）参照）．

オイラーは，さらに $n = 4k$ の場合のグレコラテン方陣を作ることができた．しかし，$n = 6$ の場合を含む $n = 4k + 2$ の場合にはどうしても作ることができなかった．微妙な言い方ではあるが，オイラーは，これだけ試しても見つからないのだから，6次のグレコラテン方陣は存在しないことが plue que probable（かなり確からしい）と述べた．また一般の $n = 4k + 2$ の場合が存在しても tout à fait irrégulier（完全に不規則）なものであろうと述べてその存在を疑った．

$n = 6$ の場合の非存在は，その後19世紀の終わりから20世紀にかけて厳密に証明された．し

かし，一般の $n=4k+2$ の場合の証明なども発表されたが，それらにはいずれも間違いが見つかった．文献 13) の初版にもその証明のあらすじが紹介されていたが，その後削除された．

その後1959年，現代代数を用いた実験計画法（デザイン）の理論を研究していたBose, Schrikhande, Parker により，すべての $n=4k+2$ $(k \geq 2)$ によりグレコラテン方陣は発見されてしまった．$n=10$ の場合など，1 枚の紙に書いてみればその正しさは，瞬時に判明するものである．

この結果は 200 年近くの後に発見されたオイラーの予想の反例として，ニューヨークタイムズのトップ記事で報道された．

4.1 数独

現在，たくさんの愛好者の居るパズル数独は次のようなものである．9 次のラテン方陣であって，さらに 9×9 の正方形を 3×3 の小正方形 9 つに分割したとき，そのいずれの小正方形にも，1 から 9 の数字が 1 回ずつ重ならずに入るものを求めるものである．問題は，既にいくつかの数字が入っている正方形が与えられたとき，残りのます目に数を入れてこのような条件を満たすラテン方陣を完成するものである．

このようなパズルが可能であるのは，異なる 9 次のラテン方陣の総数が天文学的に大きな数で，いくらでも興味深い問題を作れることにある．オイラーはたくさんのラテン方陣を作っており，ラテン方陣の総数はとてつもなく大きいと述べている．しかし彼の作った 9 次のラテン方陣の中には，上の条件を満たすものは見当たらないようである．

4.2 フェルマの問題に続くもの

ワイルズにより，3 以上の自然数 n に対して $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数の組 (x, y, z) は存在しないというフェルマの問題は解かれた．これに続くべき数学の大問題はオイラーが考えようとしていた次の問題ではないかという意見がある[5]．

自然数 n が有限体の位数となる条件は p^q, p : 素数，q : 自然数であり，このような数を**素数べき**という．位数 n の有限体に対し，その中のどの 2 つを組み合わせてもグレコラテン方陣となるような $n-1$ 個の n 次のラテン方陣が存在することが知られている．その逆：

> **オイラーの問題**　どの 2 つを組み合わせてもグレコラテン方陣となるような $n-1$ 個の n 次のラテン方陣が存在するならば，n は素数べきか？

が大問題であると考えられる[11]．これは，公理を満たす有限射影平面の位数の問題であり，デザイン理論と関係する．

参考文献

1) N.L. Biggs, E.K. Lloyd and R.J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976（一松信，秋山仁，恵羅博訳：『グラフ理論への道』，地人書館，1986）．
2) Suhyoung CHOI, The Chern Conjecture for Affinely Flat Manifolds Using Combinatorial Methods, *Geometriae Dedicata* **97** (2003), 81–92.
3) Michael W. DAVIS and T. Januszkiewicz, Hyperbolization of polyhedra, *J. Differential Geom.* **34** (1991), no.2, 347–388.
4) Michael W. DAVIS, The Hopf conjecture and the Singer Conjecture, *L'Enseignement Mathématique* (2), **54** (2008), 76–78.
5) Gary L. Mullen, A candidate for the "Next Fermat Problem", *Math. Intelligencer* **17** (1995) 18–22.
6) J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, Vol.1, Simon and Schuster, New York, 1956.
7) Thomas Puttmann and Catherine Searle, The Hopf conjecture for manifolds with low cohomogeneity or high symmetry rank, *Proc. AMS*, **130** (2001), 163–166.
8) David Richeson, The Polyhedral Formula, in "Leonhard Euler: Life, Work and Legacy", R.E. Bradley and E. Sandifer (Ed.), Elsevier, 2007.
9) David Richeson, *Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton University Press, 2008.
10) Samelson, Hans, In defense of Euler, *Enseign. Math.* (2) **42** (1996), 377–382.
11) 佐藤肇，一楽重雄『幾何の魔術—魔方陣から現代数学へ』，日本評論社 (2002/08).
12) 数学セミナー，特集 オイラー生誕 300 年，2007 年 10 月号.
13) 高木貞治，『数学小景』，岩波書店.
14) L. Eulero, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **8** (1741) 128–140（この論文は Euler Archive（http://www.eulerarchive.com/）で読むことができる）.

（さとう・はじめ，名古屋大学名誉教授）

特集／オイラー

オイラーとニュートンと古典力学



和田　純夫

「オイラーと古典力学」というテーマで執筆を依頼された．古典力学という学問を確立したとされるニュートンの『プリンキピア』[1]（1687）を解説する本を二年ほど前に上梓したことがあり[2]，またオイラーが登場する力学の教科書も書いたことがあるので，多少のことは知っているだろうということでの依頼だろうと想像した．確かに物理学を学んだ人間としてオイラーは何度も聞かされた名前だが，力学の形成において彼が果たした役割について特に詳しいわけではない．しかし，『プリンキピア』を読む中で，そこに書かれている力学と，現在，大学で教えられている力学との間には大きなギャップがあることを痛感した．そしてそれをつなぐ人物として，オイラーが非常に大きな役割を果たしていることも聞き，関心をもっていた．

ここでは，にわか勉強で得た知識をもとに，18世紀の力学の発展の中でオイラーが果たした役割について，簡単な紹介をさせていただく．オイラー個人について詳しい方には新味のない話だろうが，力学の教科書を通じてしかオイラーの名前を聞いたことのない方には，多少なりとも興味深い話が含まれていると思う．

■ 1. 主な業績 ■

古典力学（以下，単に力学という）の教科書の中で，オイラーは中心人物の一人である．まず，変分法との関係で，オイラー＝ラグランジュ方程式という，力学の一つの基本的な方程式で名が出てくる．また，剛体（大きさをもった変形しない物体）の運動についての理論では，オイラー角というものが登場し，オイラーの運動方程式が基本方程式となる．流体力学の式にもオイラーの名が付いたものがある．

しかし彼の業績は物理関係に限っても，さらに幅広い．まず，本稿の主題である力学では，29歳のときの彼の最初の大著『Mechanica（力学）』（1736）がある．ラテン語だが，副題を和訳すると「解析的に表示された運動の科学」となる．ここでは解析，すなわち微積分の手法が力学に系統的に適用された．また後で詳しく解説するが，1740年代後半には，現在の形のニュートン力学につながる，多くの業績が出ている．また1770年前後には，弾性体も含む広がりをもった物体の振舞いについての仕事があり，ニュートン力学を大きく変質させることになったとされている．

科学史家レイによって1910年に書かれた古典的な力学史の本[3]では，オイラーの業績は次のようにまとめられている．

1. 微積分的な手法の完全な系統化，
2. 解析力学の基礎，
3. 接線方向と法線方向への分解の解析的方法，
4. 慣性モーメント，
5. 最小作用の原理（変分法），
6. 慣性の増加は経路に依存しないという原則，

とされている．しかしこのように羅列しただけでは，その意義がもう一つはっきりしない．

オイラーの業績，そして18世紀の力学の発展に対して，1960年に科学史家トゥルースデルによって書かれた論文[4]には，教科書的な力学を学んだだけの人間にとっては驚くべきことが書かれている．それによれば，（天体の運動法則としての）ニュートン方程式が初めて提出されたのは，1687年（『プリンキピア』が出版された年）ではなく，1749年（オイラーの論文の出版年）であった．古典力学の誕生がニュートンからオイラーへと，60年，延ばされたことになる．

■ 2. 時代背景 ■

このような主張を理解するには多少の歴史的な経緯を知っておく必要がある．オイラーの生涯については，この特集の他の稿でも触れられていると思うが，簡単にまとめておこう[5]．オイラーとベルヌーイ（ベルヌーリ），ベルヌーイとライブニッツ，そしてライブニッツとニュートンの関係についての基礎知識である．

オイラーは1707年にスイスのバーゼルの近郊に生まれた．父は牧師だがヤーコプ（ジェームス）・ベルヌーイから数学を学んだことがあったので，息子にも早くから数学の教育を受けさせた．13歳のときにバーゼル大学で大学入学資格を得るための教育を受け始め，ヨハン（ジャン）・ベルヌーイから高く評価されて個人的にも数学の助言を受けるようになった．ベルヌーイ一族の10人ほどが数学者となっているが，ヤーコプとヨハンの兄弟は数学や力学に功績を残し，ヨハンの息子ダニエル・ベルヌーイも流体力学などで有名である．オイラーはダニエルやその兄弟たち（やはり数学者）と親交を深めた．

そのころ，サンクト・ペテルブルグに科学アカデミーが新設され，まずダニエルが招聘され，オイラーも1727年に赴任した．オイラーはその後，1741–1766年の間，これも新設のベルリン（当時はプロイセン）の科学アカデミーに移ったが，最終的にはまたペテルブルグに戻っている．

いずれにしろ，オイラーはベルヌーイ一族と学問上も経歴上も深いつながりがあるが，ヤーコプ・ベルヌーイはライブニッツと友人であり，弟ヨハンともども，ライブニッツの無限小解析から大きな影響を受けた．無限小解析とは無限小の量を扱う学問で，微分につながる考え方であった．ベルヌーイ兄弟はこれを使って，懸垂線，最速降下線，弾性棒の曲がりなどの問題を解いている．

そしてライブニッツだが，ニュートンとともに微積分の創始者とみなされる一方で，ニュートンと，微積分発見の先駆者争いで，あまり上品とは言えない激しい論争を繰り広げたことでも知られている．例えばライブニッツの重力に関する論文を，ニュートンは，『プリンキピア』の剽窃であると非難した[6]．実際，ライブニッツの表向きの発言にもかかわらず，彼は『プリンキピア』を読んでから自分の論文を書いた可能性は大きいとされている．しかし論文の結論は同じであっても，それを導く過程は大きく異なる．この違いが，『プリンキピア』に書かれている力学と，現在の教科書に書かれている力学の違いに大いに関係しているのである．

■ 3.『プリンキピア』 ■

ここで，『プリンキピア』とはどんな書物だったのか，簡単に復習しておこう．通常，この本は古典力学という学問を確立した書物ということになっているが，ここではそれ以上の理解が必要である．

『プリンキピア』は用語の定義と運動の三法則から始まる．ニュートンの運動の三法則というものは学校の教科書にも書かれているが，『プリンキピア』での内容は次のようなものである（表現は少し変えた）．

第一法則（慣性の法則）：すべての物体は，加えられた力によってその状態が変化させられない限り，静止あるいは一直線上の等速運動の状態を続ける．

第二法則：運動の量（quantity of motion，現代風に言えば運動量）の変化は，加えられた力に比例し，その力の方向を向く．
第三法則：作用・反作用の原理．

これだけを読んだ限りでは我々の理解と変わらないようだが，この前後を読むと，本質的に違う部分があることに気付く．まず，「加えられた力」という表現があるが，これは「固有の力」という表現と対比される．そして，物体が慣性によって動き続けるのは，その物体の「固有の力」によると主張される．

また，現在の我々は第二法則からすぐに，

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

あるいは微分方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を思い浮かべる．そしてこのように考えると，$F = 0$ ならば $v =$ 一定 ということになり，第一法則を含んでいるのではないかという議論が出てくる．

しかし『プリンキピア』でのこの法則の使い方を見ると，ニュートンはこの法則を

$$\Delta v \propto F\Delta t,\ \text{あるいは}\ \Delta x \propto F(\Delta t)^2$$

という意味に使っている．そして第一法則による変位（$v\Delta t$）と第二法則による変位（上記の Δx）をベクトル的に足し合わせることによって運動が得られるという見方をする（図 1）．つまり微分方程式を解くのではなく，図形的な扱いで運動が議論される．実際，ニュートンは微分の創始者（の一人）であるにもかかわらず，『プリンキピア』には微分方程式は一切出てこない．（詳しくは参考文献 2) を参照していただきたい．）

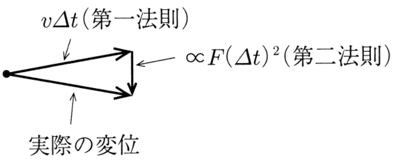


図 1　ニュートンにとっての 2 法則の意味．

4. 物体の運動

『プリンキピア』には数百の命題が提出されているが，その中でも最も有名なのが第 I 編の命題 11 である．そこでは，惑星が楕円軌道を描くということから，太陽から受けている力が距離の二乗に反比例することを導いている．これを証明できたことが，万有引力の存在を納得する上で決定的な役割を果たした．

しかし，これは現在の物理学の教科書に書かれていることとは違う．教科書では，万有引力が距離の二乗に反比例することを前提としたうえで，惑星の軌道が楕円であることを（微分方程式を使って）証明する．通常，ニュートンがやったことを順問題，教科書に書かれていることを逆問題と呼んでいる．

ニュートンが逆問題を証明したのかには議論がある．物体（天体）が太陽を焦点とする円錐曲線上を動いているのならば，太陽から受ける力は逆二乗則を満たしていなければならない，ということは証明されている．また任意の初期条件に対して（太陽を焦点とする）円錐曲線が一つ描けるので，各初期条件に対して解が一つしかないとすれば（解の一意性），惑星の軌道が円錐曲線になるのは証明できたことになる．間接的な証明である．しかしベルヌーイたちは，それでは不十分であると主張した[6]．

一般に『プリンキピア』では，物体の軌道を与えて，それから物体に働く力を求めるという議論が多い．逆に力を与えておいて，物体が各時刻でどのように動いていくかという，（我々にとって普通の）力学の問題はあまり強調されていない．

といっても，『プリンキピア』に，そのような問題に関する議論がないわけではない．例えば

プリンキピア第 I 編命題 39　物体が A から C に向けて，下向きの力を受けて直線上を落下している（図 2）．AC 上の各点で，その点での力の大きさに比例した垂線（例えば点 E では EG）を引き，その先端を結んだ曲線 BG を描く．す

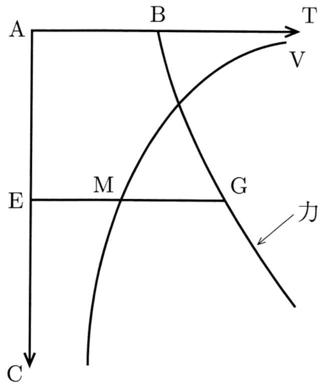


図2　ニュートンによる落下の計算法.

ると，例えばEでの速さは，面積ABGEの平方根に比例する．また，面積ABGEの平方根に反比例するようにEG上にMを取り，そのように決めたMを結んだ線をVMとする．すると物体がAからEに落下するのにかかる時間は，面積ATVMEに比例する．

式で考えれば難しい話ではない．各位置 x での力を $f(x)$ とすると

$$\text{面積 ABGE} = \int f(x)dx = \int m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{2}\int m\frac{d(v^2)}{dt}dt \propto v^2,$$

$$\text{面積 ATVME} = \int \frac{1}{v}dx = \int \frac{dt}{dx}dx = \int 1dt = t.$$

しかしここでのポイントは，このような式は示されずに結果が図で説明されていること，そして証明も，上の式のようになされるのではなく，図形的になされていることである．次の命題40は，エネルギー保存則に相当する関係を導き，命題41では，それを使って軌道，および各時刻での物体の位置を決める方法（中心力の場合）を，やはり幾何学的に説明している．しかしこれらを使って問題を具体的に解こうとはしていない．ニュートンは微積分という考え方の創始者とされているが，力学の強力な道具として微積分を使ってはいない．

5. 力学の構築

『プリンキピア』と現代の力学との間には大きなギャップがある．すでに述べたように，概念的なギャップがあった．また，解き方にも，幾何学的か解析的かという大きな違いがある．幾何学的解法は個々の問題によって工夫しなければならない点が多く，ニュートンほどの天才ではない人にとっては常に困難が付きまとうものであった．そしてそもそも，基本法則（第二法則）が，『プリンキピア』と現代の力学では，似てはいるが同じものとは言えない．一つの物体（質点）が外力を受けて運動するという問題（そして閉じた二体問題）に対しては『プリンキピア』の議論が適用できるが，三体以上の問題や剛体の問題にどのように適用できるか，自明ではなかった（ニュートンは巧妙な方法で天体の三体問題を扱っており，近日点移動など重要な結果を導いているが，第一原理に則った方法ではなかった）．これらの問題を乗り越えてオイラーによって力学が確立されるまで60年はかかったというのが，トゥルースデルなどに代表される現代の科学史家の主張である[4,6,7]．

トゥルースデルは次のようにまとめる．

「ニュートンの方法は最終的には，我々が現在知っている力学をもたらしたが，ニュートンの概念を明確にし，発展させ，重要な新しい概念によってそれを補足し，実際の問題を解く方法を示すには，オイラーの一生を掛けた仕事が必要であった．…オイラーは19歳のとき，力学についての6部からなる本を計画した．彼はそのうちの3部しか完成できなかったが，力学のすべての分野で発表した数百の論文によって，彼の計画は事実上，達成され，海洋科学，弾道学，そして天文学に関する本によって補完された．…彼は，力学の大部分を現代的な形に変えた．我々は皆，間接的だとしても，彼の本や論文から問題を学んだ．彼の方法は明確かつ自然であり，ほとんど自明にも見える．彼は力学を単純かつ容易なものにした．…」

6.「逆問題」の証明

話を具体的にするために，まず例として，逆問題を含む一体問題についてのその後の経緯を紹介しておこう[6]．

力学の解析化は，『プリンキピア』登場後すぐに大陸で始まった．その最初は，ニュートンによって剽窃と非難されたライプニッツの論文から始まるが，これはまだ，かなり幾何学的要素が含まれていたし，あまり注目は集めなかったそうである．

$$\frac{dv}{dt} \propto F$$

などの式を書き，上の命題 39 の解析的証明を与えたのはヴァリニョンである．彼はまた，楕円軌道から逆二乗則を求めることを，微積分を使って行っている（1700）．

力から軌道を求める（つまり逆二乗則から楕円軌道を導く）ことを初めて行ったとされるのはヘルマンだった．彼の手順はヨハン・ベルヌーイから批判されたが，他の人によって改良された．ベルヌーイ自身も他の方法で軌道を導いている（現代的表現では，ヘルマンの方法はレンツ・ベクトルという保存量を使ったもので，ベルヌーイの方法はエネルギー積分を使ったものである）．

そして，単に軌道の形ばかりでなく，時間とともに惑星がどのように動くかという，力学の最終的な問題を微分方程式を使って解いたのが，この稿の主人公であるオイラーであった（1747）．彼は，極座標で問題を解くというエレガントな方法を用いた．エネルギー積分を通して微分方程式を解くという，現在の教科書にも標準的な方法として記載されている手順を用いた．最終的な答えが初等関数で表されないことはよく知られている．オイラーの表式も，補助変数を通して時刻と位置が関係するという間接的なものである．

7. 力学の基本原理

このような，微積分による問題の解法が開発されると同時に，方法論上の重要な変化もあった．それは運動方程式を書き下す際の基準の問題である．軌道が直線ではない場合，現在の我々は，空間に固定された座標系（通常は xyz 座標系）を考え

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z \qquad (1)$$

という式を書き下す．これがまさに，第二法則が意味することだと我々は理解している．

しかし『プリンキピア』ではそうではなかったということはすでに説明した．運動の方向に働く固有の力による動きと，外から加える力による動きを加えるというように考えられていた．それに影響されたためか，この原理を微分方程式に書き直すときも，まず軌道に接する方向の運動方程式を考え，それに垂直な方向（法線方向）の運動方程式を追加するという手法が取られた．一体問題のときはそれでうまくいく場合も多いが，この手法を自由度が多い系にどのように拡張できるのか，自明ではない．つまり，運動の法則が具体的に多自由度の場合に何を意味するのかが明確ではなかった．そのため，問題に応じて，運動量の保存則やエネルギー保存則などを使った，技巧をこらした解法が考えられたが，それが正しいという保証はなかった．

実際，オイラーも 1736 年に執筆した『Mechanica』では，このような手法にとらわれていた．しかし天体の運動の問題を解いた 1747 年頃になると，空間に固定された xyz 座標系を考えて問題を解くようになっていた．

このような発想は，多自由度の系に容易に拡張できるばかりでなく，大きさをもった物体に対しても適用できる．そして 1752 年に出版された，「力学の新しい原理の発見」という論文で，式 (1) が力学の最も一般的な基本原理であると表明した．ただしそこでは式 (1) は，物体全体に対する方程式ではなく，物体を微小部分に分割したときの，各部分の運動を表す方程式だとみなされている．このような論文が書かれたこと自体が，ニュートンの第二法則が決して，我々が現在理解しているよ

うなものとは捉えられていなかったことを意味する．オイラーにより，第二法則が運動の基本法則という地位を初めて与えられたのである．

■ 8. 力学の拡張 ■

このような主張をした前後に，オイラーは様々な多自由度の問題，そして連続体の問題を議論している．例えば，オイラー方程式と呼ばれている剛体の運動方程式が導かれた．慣性モーメント，慣性テンソルといった概念を導入したのもオイラーである．また，バネでつながった N 個の質点の運動や，振動する弦の運動（偏微分方程式で表される）も議論された．そこでは基準振動という，振動論での基本的な概念が発見された．

剛体，そして弦の振動の理論ができると，次の問題は変形する物体の運動である．例えば流体力学の研究が行われたが，これについてはこの特集の別の稿を参照していただきたい．

次にくるのは弾性体の理論であった．法線応力やずれ応力という概念が導入され，応力はベクトルではなくテンソルとすべきであることがわかった．しかし力がテンソルであるとすると，もはや弾性体の振舞いは，単にその微小部分の式 (1) による振舞いの組合せとはいえなくなる．そこでオイラーは，力学の基本原理として，式 (1)，すなわち「運動量の変化率は力に比例する」という原理に加え，「角運動量の変化率はトルクに比例する」という原理を加えた．この 2 つの原理は現在では，「最小作用の原理」の下に統一的に理解できることがわかっている．

■ 9. 変分原理・最小作用の原理 ■

微分は，関数が極値（最大値あるいは最小値）を取る位置を決めるのに使われる．それに対して，関数全体によって決まるある値が極値になるような関数形を求める方法が変分である．変分の萌芽はすでに『プリンキピア』に見られるが，それを発展させたのはベルヌーイやオイラーであった．オイラーは具体的に，その関数が満たすべき微分方程式を導いており，これもオイラー方程式と呼ばれることがある．

変分法は数学の話であるが，これと力学が結び付いたのが最小作用の原理である．18 世紀には，物体の運動を決める原理として様々な最小作用の原理が提案された．すでに述べたように，18 世紀の前半には，ニュートンの運動の法則が力学の普遍的な基本法則としてまだ確立していなかったので，力学の基本原理を他に求める試みがなされていたのである．例えばオイラーは，一質点の運動に対して，速度を位置座標で積分したものが最小になる運動が実際に起こる運動であるという原理を提案している．ただし，エネルギーがある特定の値を取る運動に限定し，その中で上記の量が最低になる運動を求めるという提案である．

現代の最小作用の原理は，ラグランジアンというものを時間で積分した量（作用と呼ぶ）を最低にする，ということになっている．そしてこの条件を満たす運動を決める微分方程式が，ラグランジェ方程式（あるいはオイラー＝ラグランジェ方程式）と呼ばれるものである．ニュートンの運動方程式がわかっている状況では，ラグランジェ方程式はそれに等しい．しかしニュートンの運動方程式が自明ではない，あるいは分からない状況でも，ラグランジェ方程式による方法は通用する．角運動量に関するオイラーの原理も，ラグランジェ方程式とみなすことができる．

このようにして力学の理論は拡張され一般化された．弾性体の理論もこの立場では同じ原理の下に扱えるし，その後，登場する電磁場の理論も，同じ原理に基づく力学の一理論として定式化できることがわかった[8)]．これらはオイラー以降に分かったことだが，その基礎はやはりオイラーにあったことは，これまでの説明で理解していただいたことと思う．

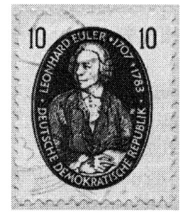
岡本拓司氏に何点かの貴重なご教示をいただいた．ここにお礼申し上げる．

参考文献

1) 入手しやすいものとしては, I. Newton (translated by A. Motte), "The Principia", Prometheus Books, あるいは中野猿人訳・注,『プリンシピア』(講談社).
2) 和田純夫,『プリンキピアを読む』, 講談社ブルーバックス (2009).
3) David H. Ray, "A History of Mechanics" Lancaster PA (1910). この本は Google でデジタル化されている.
4) C. Truesdell, "A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason", *Arch. for Hist. of Exac. Sci.*, Vol.**1** (1960).
5) E.A. フェルマン（山本敦之訳),『オイラー―その生涯と業績』, シュプリンガー・ジャパン (2002).
6) 山本義隆,『古典力学の形成』, 日本評論社 (1997).
7) 例えば, 中田良一,『Leonhard Euler による古典力学の解析化』, http://www.hmu.bu.kyoto-u.ac.jp/report/2-pdf/2.tetsugaku/2.05.pdf
8) 例えば, 和田純夫,『振動・波動のききどころ』, 岩波書店 (1995).

（わだ・すみお, 東京大学大学院総合文化研究科）

オイラーと流体力学



高木　隆司

1. はしがき

レオンハルト・オイラーは，数学者として知られているが，彼の著書や論文の約3割は，力学や流体力学に関するものである．オイラーは，ガリレイやニュートンによって出発した古典力学の完成者と見なされている．ここでは，いくつかの文献を参考にし，筆者の想像を交えながら，古典力学のうちの主として流体力学，とくにオイラー方程式と呼ばれる方程式に焦点を当てることにする．

ニュートンによって研究の集大成として表された『**自然哲学の数学的諸原理**』(通称は『**プリンキピア**』，初版1687年，文献1))は，世界的に知られているが，実際に読まれることがほとんどない書物とも言われている．そのためか，古典力学を学ぶとき必ず出てくる運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ はこの書物に登場せず，同じ内容が文章で述べられているだけであることはあまり知られていない．この書物のページをめくってみると，物体の運動や軌道を示す幾何学的な図が多く，文章中に幾何学的証明が多用されている．例えば，楕円軌道上を動く物体は，楕円の焦点までの距離に反比例する力(いわゆる万有引力)を受けることを幾何学的に証明している．

ただし，『プリンキピア』の中の証明も一般の読者には難解なものが多く，自明と称して証明を与えていない命題を使ったりしている．最近，これらの命題のいくつかに丹念に証明を与え，『プリンキピア』を一般の読者に読みやすくするという仕事が日本人によってなされている(文献2))．

微積分はニュートンの重要な業績の一つであり，それを用いて運動を解析することはニュートンならできたはずだと思う．ニュートンが学生時代に作成していたノートからは，**デカルト**による『方法序説』や『哲学の原理』(文献3))に影響を受けたことが伺われる(文献1))．したがって，座標系を導入して物体の運動を解析することは，彼はすぐ思いついたのではないかと想像される．しかし，なぜそれをしなかったのか不思議である．彼は，古代ギリシャ以来の幾何学によって議論を進めるのが最も尊い方法だと思っていたのだろうか．

ところで，デカルトが解析幾何学を提案したときの主旨は，著書『方法序説，およびその方法の試験(屈折光学，気象学，幾何学)』(1637年，文献3))の『幾何学』の冒頭に，「幾何学のすべての問題は，いくつかの直線の長ささえ知れば作図し得るような諸項へと，容易に分解することができる」と述べられている．数値を議論することによって幾何学を構築しようとしたのである．しかしながら，彼は座標系を導入してはいなかった．現在**デカルト座標**と呼ばれる x, y 座標系を提案したのはドイツの哲学者**ライプニッツ**である．また，ライプニッツも微積分の方法を発明しており，その優先性(どちらが先かということ)について英国王立協会に提訴したとき，たまたまニュートンがその会長であったためか却下されたとのことで

ある（文献 4)）．ニュートンは，ライプニッツへの敵対心から，あえて座標系を利用しなかったのだろうか．

流体力学は，古典力学の創設時から，その中で重要な地位を占めていた．『プリンキピア』の中では，「第 1 篇 物体の運動について」と「第 2 篇 物体の運動について（抵抗のある媒質中における）」の分量の比は，和訳本（文献 1) で約 4 : 3 であり，流体力学に関わる後者が半分近くを占めている．とくに，同心円の軌道上で回転運動する流体（通常は渦と呼んでいる）では，隣接する 2 つの同心円上の流体間において，速度差に比例する粘性力がはたらくことを仮説として挙げ，流れの考察をしている．現在，この仮説が成り立つ多くの流体（水，空気，蜂蜜，など）は**ニュートン流体**と呼ばれる．

古典力学のうち，物体の運動の力学に対するオイラーの功績は，本号の「オイラーと古典力学」に任せて，以下は流体力学について述べよう．

2. オイラー方程式とは何か

オイラー方程式とは，粘性が無視できるサラサラした流体の動きを解析するための運動方程式である．3 次元空間内の流体の動きは，各時刻において空間の各点で考えた流体の微小部分がもつ速度ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ の分布を与えることによって記述することができる（図 1(a) 参照）．すなわち，$\boldsymbol{u}$ を時刻 t と座標 (x, y, z) の関数として $\boldsymbol{u}(t, x, y, z)$ と表すのである．オイラー方程式は，この $\boldsymbol{u}$ の時間変化の様子を表す次のような方程式である．

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\boldsymbol{\nabla} p. \qquad (1)$$

ここで，ρ は流体の密度（単位体積当たりの質量），p は流体内部に発生している圧力分布，$\boldsymbol{\nabla}$（ナブラ）は式 (1) の中央の偏微分をまとめて表す記号である．

この式は，物体の運動方程式と本質的に同じものであり，左辺は質量と加速度の積，右辺は圧力

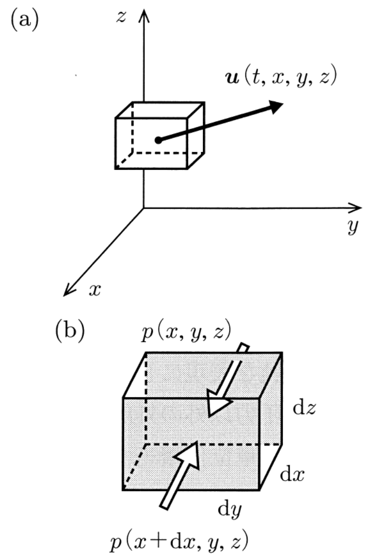


図 1 座標による流れの表現．(a) 流体の微小な部分の流速ベクトル，(b) 圧力分布が流体の微小部分に与える効果．

が流体に及ぼす力を表す．時間微分の記号として，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ ではなく，大文字の D を使っていることの事情は後で述べる．

圧力分布 p によって流体の微小部分が受ける力が，なぜ式 (1) に示すような偏微分で表されるのということを説明しておく．図 1(b) に示すように，直方体で表された流体部分には，6 つの面を通して圧力がかかっている．このうち，x 座標に垂直な 2 つの面に着目しよう（図中で網目をつけた面）．この 2 つの面は x 方向に $\mathrm{d}x$ だけ離れているので，それらの面上の圧力を，それぞれ $p(x, y, z)$, $p(x + \mathrm{d}x, y, z)$ とする．p は，一般に時刻 t にも依存するが，ここでは t は省略した．

圧力は，単位面積当たりの力であり，今考えている面の面積は $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ なので，2 つの面にはたらく圧力は，この流体部分に

$$p(x, y, z)\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - p(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

という力を与える．この力は，x 軸の方向を向いている．この流体部分の体積は $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ であるので，単位体積当たりの流体が受ける力の x 成分は，この式を $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ で割って次のように与えられる．

$$\frac{p(x,y,z)\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z-p(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z}$$
$$=\frac{p(x,y,z)-p(x+\mathrm{d}x,y,z)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

残りの y 軸，z 軸に垂直な 4 つの面にはたらく圧力についても，同様に求めることができ，それぞれ力の y 成分，z 成分を与えるので，結果として式 (1) の右辺が導かれるのである．なお，$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ を 0 に近づけた極限というべきであるが，ここでは，あえて単純な表現にした．

なお，流体に圧力以外の外的な力がはたらいているときは，その単位体積当たりの力ベクトル $\boldsymbol{f}$ を右辺に追加すればよい．

流れの加速度を $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ と表した事情を説明しよう．物体の運動では，その位置ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が時刻 t に依存し，その物体は次の時刻 $t+\mathrm{d}t$ には位置 $\boldsymbol{x}(t+\mathrm{d}t)$ に来ている．したがって，物体の加速度は t による 2 階微分で与えられる．ところが，上に導入した流速ベクトル $\boldsymbol{u}(t,x,y,z)$ は，位置 (x,y,z) における流速であり，同じ位置で見ると，時刻 $t+\mathrm{d}t$ では上流からやってきた別の流体部分が占めている．したがって，$\boldsymbol{u}(t,x,y,z)$ を時刻 t だけで微分したものは，同一の流体部分がもつ加速度ではないのである．

そこで流体部分の加速度の正しい表現を求めるには，位置 (x,y,z) にいた流体部分が，時間の経過とともに移動することを考慮しなければならない．図 2 は，時刻 t で (x,y,z) にいた部分の流速が，わずかな時間 $\mathrm{d}t$ の後に位置 $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ に来ていることを示す．したがって，この流体部分の加速度は，

$$\frac{\{\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t,x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)-\boldsymbol{u}(t,x,y,z)\}}{\mathrm{d}t}$$

でなければならない．カッコ内第 1 項では，変数が微小量だけ変化しているので，この項は各変数による偏微分と変数の微小変化量の積で表され (いわゆるテイラー展開)，この式は次のように変形できる．なお，微少量の 2 次の項は無視した．

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\left\{\mathrm{d}x\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}\right\}}{\mathrm{d}t}$$

ここで，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ は，流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分 u_x, u_y, u_z に他ならないので，流体の微小部分の加速度 $\boldsymbol{a}$ が次のように求められる．

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+u_x\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+u_y\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}+u_z\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}. \quad (2)$$

この式の右辺を $\mathrm{D}\boldsymbol{u}/\mathrm{D}t$ と表したものが式 (1) である．

この微分記号はラグランジュ微分と呼ばれ，スイスの数学者**ジョゼフ・ルイ・ラグランジュ**によって与えられた表記である．

なお，ラグランジュは，オイラーによる変分法という数学の技法を受け継ぎ，それを完成させた．その基本的な式が，**オイラー・ラグランジュの微分方程式**である．おそらく，彼は，流体力学においてもオイラーの仕事を受け継ごうとしたのであろう．

この節のはじめに，$\boldsymbol{u}$ を時刻と座標の関数として $\boldsymbol{u}(t,x,y,z)$ と表した．この方法は**オイラーの表現**と呼ばれる．それに対して，流体の各微小部分に名前をつけて，それらの位置を時刻 t の関数として表すという方法もある．微小部分の名前としては，例えば，時刻 0 での微小部分の位置 (x_0,y_0,z_0) を指定すれば良い．この場合，微小部分の速度は $\boldsymbol{u}(t,x_0,y_0,z_0)$ となる．この方法は**ラグランジュの表現**と呼ばれる．この表現は，質点の集まりの運動を記述する場合と本質的に同じである．ただし，質点と違って微小部分が大きさをもち，しかも時々刻々形を変えていくので，解析が困難にな

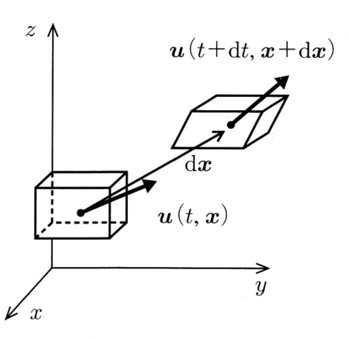


図 2　直方体で表した流体部分の微小時間 $\mathrm{d}t$ 内の移動．(x,y,z) を $\boldsymbol{x}$，$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ を $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ と表してある．

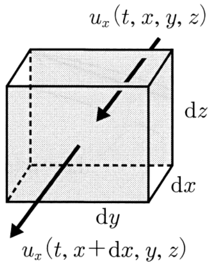


図 3　微小な流体部分からの流出量の評価.

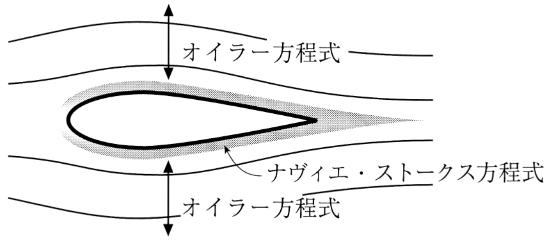


図 4　流線形の代表である翼を通過する流れ．図中の語句は，その領域の流れを支配する方程式.

る場合が多い.

実際に流体運動の解析をする際には，次の**連続の式**を追加する．ただし，流体の密度が一定の場合を考えている.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \tag{3}$$

この式は，単位体積当たりの領域から流出する流体の量がトータルとして 0，すなわち膨張圧縮がないという条件から導くことができる.

図 3 に示すように，直方体の微小な領域で，x 軸に垂直な 2 つの面から単位時間当たりに流れ出す流体の量を考えよう．流れが面に斜めに当たる場合は，流出量は面に垂直な成分 u_x が寄与する．したがって，これら 2 つの面での流出量は

$$(u_x(x+\mathrm{d}x,y,z)-u_x(x,y,z))\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$$

である．流体部分の単位体積当たりで考えると，これを $\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$ で割ることにより，

$$\frac{(u_x(x+\mathrm{d}x,y,z)-u_x(x,y,z))\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z}$$

となり，これから x 軸方向の流出量は $\partial u_x/\partial x$ となる．y, z 軸方向の流出量も求めて加えると，全流出量となり，それらの和が 0 ということから式 (3) が導かれる．結局，式 (1) と (3) が，粘性を無視できる流体の運動を支配する方程式である.

粘性が重要なはたらきをする場合は，式 (1) の右辺に新たに粘性項を追加した**ナヴィエ・ストークス方程式**を採用しなければならない．ところが，たとえば物体を通過する流れでは，流速がある程度速いと，粘性の効果は物体のごく近くに限られる場合がある．流線形と呼ばれる形をもつ物体の場合が，その例である（図 4 参照）．そのような場合は，物体のごく近くはナヴィエ・ストークス方程式を用い，その領域の外ではオイラー方程式を用いることによって全体の流れを良い近似で表す解を求めることができる．このように，オイラー方程式は，粘性をもつ流体の解析でも威力を発揮する場合があるのである.

3. ベルヌーイの定理との関係

ベルヌーイの定理は，オイラーの 7 才年上の友人であるスイスの数学者**ダニエル・ベルヌーイ**によって 1738 年に発表されたもので，彼の著書 “Hydrodynamica”（1738 年に出版）に説明されている．以下では，粘性が無視できる流体について，流れの様子が時間的に変化しない定常流の場合で，この定理の内容を見ていこう.

ベルヌーイが導いた定理では，圧力 p と流速の大きさ u の関係が，微分操作を含まない次のような式で与えられる.

$$\frac{1}{2}\rho u^2+p=\text{流線に沿って一定}. \tag{4}$$

ここで，右辺にある**流線**という言葉を説明しよう．流体中の多くの点で，流速ベクトルの矢印を描く．次に，ベクトルの方向が接線になるように，これらのベクトルの起点を滑らかにつないで曲線を描く（図 5 参照）．この曲線が流線である．流線は多数引くことができ，いくつかの点（よどみ点，あるいは結節点と呼ぶ）以外では互いに交わることはない.



図 5　流線の定義.

式 (4) を導く際に，ベルヌーイは力学的エネルギーの保存則からヒントを得たらしい．そのときの彼の発想を，推定してみたい．重力を受けながら運動する物体は，もし上向きの初速度をもっていると，上昇するにつれて重力のために減速する．このことは，運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和が一定であることを意味する．流れの中でも，流体が圧力の高いほうに向って運動すると，圧力に押し返えされて減速する．このことは，運動エネルギーと圧力の和が流線に沿って一定であることを意味する．ベルヌーイが式 (4) を導いたとき，このような発想に勇気づけられたであろう．

このベルヌーイの定理は，後にオイラーによって一般化され，流体に外力がはたらく場合の単位体積当たりの位置エネルギー U を含み，次式で定義される**ベルヌーイ関数** H を用いて定式化された．

$$H = \frac{1}{2}\rho u^2 + p + U = \text{流線に沿って一定}. \tag{5}$$

実は，H は流線に沿ってだけでなく，流れの性質によって全領域で一定であったり，ある曲面上で一定であったりする．詳細は，参考書を参照されたい（文献 5)).

ここで，式 (4) から，定常流に対するオイラー方程式を導出できることを注意しておこう．図 6 のように，1 本の流線上の近接する 2 点で式 (4) の左辺が等しいことは，次の式で表現できる（中点は内積を表す）．

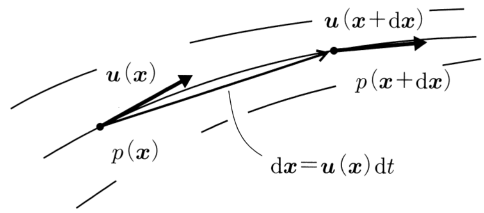


図 6　流線上の 2 点でベルヌーイの定理を適用する．

$$\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})) + p(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) + p(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ まで，$\mathrm{d}t$ の時間で移動するとしよう．式 (6) で，変数の微小変化の効果を微分を用いて書き換え，$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\mathrm{d}t$ を用いると，多少の計算の後に次の式が得られる．

$$\boldsymbol{u}\cdot\left(u_x\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + u_z\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} + \boldsymbol{\nabla}p\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{7}$$

この式が成り立つためには，括弧の中が 0 でなければならない．これが，オイラー方程式 (1) で時間の偏微分がない，すなわち定常流の場合の方程式である．

4. オイラー方程式の非線形性について

オイラー方程式は，その左辺である式 (2) を見てもわかるように，流速とその微分の積からなる項を含んでいるので非線形である．一般に，非線形方程式に従う現象は，乱れを発生させやすい．流れの分布にいくつかの波数（単位長さ当たりの波の数）の変動が混じっていると，それらの積によって高調波（より短い波長の波）や長い波長の波が発生し，それが繰り返されて乱雑な変動が現れるからである．

この非線形性の効果は，次のようにして理解すればよい．今，波数が α，および β の 2 つの変動があり，それぞれ $\cos 2\pi\alpha x$, $\cos 2\pi\beta x$ で表されるとしよう．これらの積を作ると，

$$\cos 2\pi\alpha x \cdot \cos 2\pi\beta x$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos 2\pi(\alpha+\beta)x + \cos 2\pi(\alpha-\beta)x\}$$

となり，波数が $\alpha+\beta$ の高調波，$\alpha-\beta$ の長い波長をもつ波が生まれるのである．

ところで，実際には流体が粘性をもっているために，発生した高調波は強い粘性の効果で減衰し，乱れの増加が抑制される．

図 7 は，サイズ 20 cm 程度の平たい皿に水を入れて乱れた流れを作り，それを墨流しの方法で記録したものである．水は粘性をもつが，このサイズの流れではその効果は小さいので，ほぼオイラー方程式に従う流れとみなしてよい．図 7 から，個々の流体部分が引き伸ばされて細くなり，他の部分に入り込んでいく様子がわかる．これが，高調波の出現である．一方，この図の半分くらいのサイズをもつ大きな塊も見られる．これが長い波長の変動である．

墨流しは，水面近くの水平方向の流れを記録しているので，ほぼ 2 次元的な流れとみなしてよい．2 次元空間の流れでは，乱れが発生しても，それ以上の奇妙な現象は起きない．

一方，3 次元空間における流れには，2 次元の場合とは異質な現象が現れる．それは，竜巻のような細長い渦が複数現れたとき，それらが引き伸ばされたり，巻きついたりして，激しい変動をともなう複雑な構造を作ることである（文献 6)）．しかも，このような構造が現れるのは，流体中のほんの一部分に限られる．3 次元空間での乱流とは，ちょうど宇宙のところどころに星雲が浮かんでいるように，滑らかな流れ分布の中に激しく乱れた小さな部分が散らばっているというイメージをもつとよいだろう．



図 7　墨流しで記録した乱流（高木撮影）．

これらの**乱流現象**は，オイラーの時代からずっと後になって意識され始めたものである．乱流に関する多くの研究が，過去 100 年の間に精力的になされた（文献 7, 8)）．しかし，現在も完全な理解は得られていない．天国にいるオイラーは，この現状を見おろしてくやしがっているに違いない．

最後に，オイラー方程式が公表されて 250 年目である 2007 年に，京都大学数理解析研究所で研究集会が行われたことを指摘しておこう．その報告は文献 9) を参照されたい．

参考文献

1) S.I. ニュートン：世界の名著 31『ニュートン』，中央公論社，1979
2) T. Sugimoto: How to present the heart of Newton's Principia to the layperson: A primer on the conic sections without Apollonius of Perga, *Symmetry: Culture and Science*, Vol.**20**, Nos.1–4, 113–144, 2009.
3) R. デカルト：『デカルト著作集 1』，白水社，1973.
4) B. アータレイ：『モナ・リザと数学』高木隆司・佐柳信男訳，化学同人，2006.
5) 今井　功：『流体力学』裳華房，1973.
6) 高木隆司：『渦糸の理論』，物理学最前線 21，共立出版，3–57, 1988.
7) 巽　友正編：『乱流現象の科学』，東京大学出版会，1986.
8) 神部　勉，P.G. ドレイジン：『流体力学—安定性と乱流』，東京大学出版会，1998.
9) http://eagle.ifs.tohoku.ac.jp/rims2007euler/index.html

（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

オイラーの著書を紐解く



足立　恒雄

オイラーの著書を紐解くといってもほとんど読んだ経験がないので，こういう本が英語，あるいは日本語で読めますよという紹介しかできないことをあらかじめお断りしておく．

オイラーには公刊された著書が18冊残されているようであるが，英語に翻訳されているのは4冊，そのうち日本語になっているのは1冊だけである．

［無限解析入門（Introductio in analysin infinitorum: 1748)］(英訳題名：Introduction to Analysis of the Infinite)［邦訳］高瀬正仁訳『オイラーの無限解析』，『オイラーの解析幾何』(海鳴社)

『解析幾何』は座標系の考え方が公刊された最初の書物と思われる．デカルトが解析幾何の創始者のように言われるが，それは俗説に近い．デカルトは負数を数として扱っていないし，縦軸もない．オイラーのこの本で直交座標系に関する考え方が初めて公刊されたのである．しかし，現在のように先に座標系があって，そこにグラフが描かれるのではなく，横軸があって，グラフに合わせて縦軸が選ばれているのが面白い．そもそも縦軸という概念は後から出て来る．

しかし，せっかく日本語で読めるのだから，これ以上書く必要もなかろう．

［微分学教程　2巻（Institutiones calculi differentialis: 1755)］(英訳題名：Foundations of Differential Calculus，1巻だけの翻訳)

この本で面白いのは何といっても，$|x|<1$ でしか成り立たない等式

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

に $x=1,2,3,\cdots$ を代入して

$$1+1+1+1+\cdots=\infty,$$
$$1+2+2^2+2^3+\cdots=-1,$$
$$1+3+3^2+3^3+\cdots=-1/2$$

等々を導き出し，その意味をああでもない，こうでもないと考察しているところであろう．たとえば「負数は無限大よりも大きい」のだろうか，という考察もある．昔はナンセンスの一言で片付けられたが，なかなかどうして．たとえば，p 進解析との関係も考えられ，未だ興味は尽きない．

［ドイツの一公女への書簡(Lettres à une Princesse d'Allemagne: 1768)］(英訳題名：Letters of Euler to a German Princess)

234通の手紙から成るこの本には，哲学・力学・神学・倫理学・光学・音楽論・天文学に関するオイラーの見解が余すところなく述べられている．オ

イラーはプロテスタントの家に生まれて穏健思想であったため，啓蒙・自由思想には我慢がならなかったらしく，真っ向から歯むかっていっている．

この本の評判は真っ二つに分かれている．ダランベールは「数学におけるかくも偉大な天才が，形而上学においては学童にも劣るとは．神は一人にすべてを与えるわけではない」とラグランジュに宛てて書いた．親友のダニエル・ベルヌーイも「あなたはこうしたことにかかわるべきではない」と忠告したという．ヴェイユも『数論 歴史からのアプローチ』の中でこの意見に加担している．

一方，カントの先験的感性論は，オイラーの「時間・空間は感覚世界から抽象された概念ではない」という説を発展させたものであって，オイラーは現代哲学の始祖と見られるというのが賛辞の代表である．

オイラーが「数学的」に作曲した曲には宮廷中が辟易したという話などを総合すると，オイラーは数学（といっても当時の数学の意味は広い）以外ではあまり大したことなかったのではなかろうか．少なくともディドロー編『百科全書』の数学部門を一人で書き上げたほどの大啓蒙文化人ダランベールからは片腹痛いと思われたに違いない．

[代数学完全入門（Vollständige Anleitung zur Algebra: 1770）]（英訳題名：Elements of Algebra）

この著作は『オイラー全集』の第1巻に収められている．ラグランジュによって書かれた「ラグランジュ還元」が付録になっている．オイラーの本文は高度な数学書とは言えないが，この付録は極めて重要であってフランス語に翻訳したヨハン・ベルヌーイIII世は「この付録のゆえに翻訳したのだ」とまで書いている．付録が超一流の数学者の手になっていて原著の値打ちが上がっているという意味では，ディリクレ著デデキント補遺の『整数論講義』（共立出版：第4版の邦訳）と双璧であろう．

内容は第1部，第2部の二つからなる．第1部は「定解析」と呼ばれ，整数の基本的性質や冪根，4次までの方程式の解法が述べられている．たとえば方程式の解法を見ると，現代の教科書にも見られないほどきわめて丁寧に書かれている．どうしてこうした解法にたどり着くのかという観点からは最良の教科書だろう．

第2部は「不定解析」と称される分野である．実は，この第2部はかつて和訳されたことがある：林鶴一・小野藤太訳『おいれる代数学　不定解析論』（大蔵書店：1914年）

たとえば，

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

という型の不定方程式の有理解を求める問題が種々の実例で解かれている．すなわち現今の言葉で言えば，楕円曲線上の有理点を求める問題が解かれているのである．

与えられた二つの有理点を通る直線から第3の有理点を求める方法はよく知られているが，直線の代わりに2次曲線を使うなど種々の方法が試されていて，現代の教科書とは違う面白さがある．

2次の不定方程式の解法も書いてあるのだが，これをやりながらどうしてオイラーが不定方程式論と積分の変数変換の問題が同じ主題の別の見方にすぎないことに気が付かなかったのか，とても不思議な気がする．

最後の方にフェルマーの最終定理の指数 n が3と4の場合の証明を与えている．$n = 3$ の場合に $\mathbb{Z}[\omega]$（ただし $\omega \neq 1$, $\omega^3 = 1$）において素元分解の一意性が成り立つかどうかの考察を見落としていることも有名な話だが，以前の論文で初等的な証明を与えていたことを立証する考証が後年なされた（事実そうなのかは筆者は確認していない）．これらの例から，盲目のオイラーが口述筆記させたせいではないかというのは正しい推察かもしれない．

（あだち・のりお，早稲田大学名誉教授）

階乗の拡張



木村　達雄

私は学生の頃，オイラーが $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ を自然数 n ではない一般の数 s に対しても拡張することを考え，20 才の頃にそれをゴールドバッハへの手紙に書いたこと，それは

$$(s-1)! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

だということを本で読んで何でこのような式を思いついたのだろう？ と不思議に思いました．オイラーは後に，この積分表示も与えますが，オイラーの発想は自然でわかりやすい物だったということを聞いて，オイラーはどう考えたのだろうと自分なりに想像してみました．

以下はその想像上のお話ですので気楽に楽しんで下さい．

あるとき，オイラーは女友達と気楽に話しています．オイラーが「$n!$ というのは $1 \times 2 \times \cdots \times n$ のことなんだよ」と言うと，数学を何も知らないその女性は無邪気な質問をします．「では 0! とか 2.5! は？」それを聞いてオイラーは「そういえば何で自然数を階乗にしようと思ったのだろう？ 他の違うもので階乗にすることは出来ないのだろうか？」という物事の初めの発想で色々と考えていきます．でも最初はなかなか難しくてにっちもさっちも行かない日々が続きます．そして色々なことを考えたのですが，その中の一つに次のものがありました．s と n を勝手な自然数として $(n+s)!$ を考え，これを二通りに表します．最初は $(n+s)! = (s-1)! \cdot s(s+1)\cdots(s+n)$ です．もう一つの表し方は，$(n+s)! = n! \cdot (n+1)\cdots(n+s)$ ですが，$(n+k) = n(1+k/n)$ を使うと $(n+s)! = n!n^s \cdot (1+1/n)\cdots(1+s/n)$ となります．そこで二つの式から，

$(s-1)! = \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \cdot (1+1/n)\cdots(1+s/n)$

が得られます．ここから先がなかなかうまくいかなかったのですが，オイラーはあるとき気が付きます．「自分の中にあるルールとかそういうとらわれているものをはずさなければいけない．二つあるとぶつかったままでうまくいかない．ひっかかっているものを消して一つにすればぶつからないで流れる」と思うようになります．$(s-1)!$ の最初の部分 $n!n^s/\{s(s+1)\cdots(s+n)\}$ はすべての数 s に対して意味を持つけれども，$(1+1/n)\cdots(1+s/n)$ の部分が s が自然数のときしか意味を持たないところで，ここが引っかかっていると気が付きます．そこを消すにはどうしたら良いか？「n は s に無関係な自然数だから n を無限に大きくすれば，この引っかかっている部分は 1 になって消えてしまう」

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)\cdots(1+s/n) = 1.$$

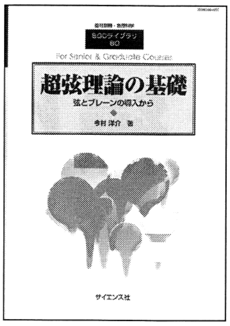
こうしてオイラーは階乗を一般の数に拡張することに成功しました．例えば $s=1$ として $0! = \lim_{n\to\infty} n!n/(n+1)! = 1$ が得られます．

（きむら・たつお，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

書評

超弦理論の基礎
弦とブレーンの導入から

今村洋介著，B5 判，192 頁，本体 2429 円，サイエンス社



大学院生を指導する立場に立ってみて，あらためて「ストリング理論を教えるのは難しい」と感ずる．標準的な学部の教育を受けた物理の学生が知らないであろう数学の知識をたくさん必要とするし，理論物理学の中でも特に直感が働きにくい抽象的な分野と言えるかもしれない．素粒子をやりたい学生の中には，潜在的にストリング理論に興味を持っている人も相当数いると思われるが，上記の困難さに嫌気がさして，面白いところまで到達する前に挫折してしまう人も多いのではないかと想像する．

さて，本書は大学院の修士課程くらいを想定した入門的なストリング理論の教科書である．あるいは量子力学と相対性理論をしっかり勉強している学部生でも頑張れば前半部は読めるかもしれない．総ページ数に制約があったためと思われるが，網羅的なテキストではない．著者も前書きで書かれているが，例えば内部空間へのコンパクト化やベネツィアーノ振幅の計算といったテーマは除かれている．総花的になってしまうよりも，むしろポイントを絞ってメリハリの効いたテキストを志向したと思われる．原論文の要約の羅列といった感のあるレビューの文献も多いが，本書はそれらに比べると，随所に著者の創意工夫が見られる点ではるかによいと思う．例えば冒頭，ストリングの量子化のための「warming up」として二原子分子の例を丁寧に解説する箇所や，ところどころに見られる古典電磁気学を引き合いに出した解説など，読者ができる限り直感的・物理的に概念を把握できるようにという配慮が感じられる．

内容に少し触れよう．1 章は導入部であるが，2 章ではボソニック弦の古典論および量子論を丁寧に解説してある．上でも触れたが，二原子分子とのアナロジーを用いるなど，できるだけ初学者にもわかりやすくする配慮が感じられる．量子化に向いていないため，ストリング理論の教科書では案外軽視されがちな南部・後藤作用に関する古典的な解析の部分も，「ストリングの物理」を理解する上で有益であろう．

3 章で超弦理論の解説となるが，この章は初学者には少々難しいかもしれない．ストリング理論の入門書の場合，超弦理論の詳細は省略して概略を述べるに留める，という選択肢もあるかもしれないが，本書ではタイプ II 超弦のスペクトルの導出までを，光円錐ゲージでの RNS および GS 定式化を用いてしっかり解説してある．これは D–ブレーンの電荷などを論ずる場合，タイプ II 超弦の零質量スペクトル，とりわけ反対称テンソル場の情報を必要とする，といった点への配慮もあったかと考える．

4 章と 5 章のブレーンの解説は著者が最も重きを置いた部分であろう．最後のほうはかなり高級なトピックも登場して歯ごたえがあるが，ブレーンに関する基礎的概念を，古典電磁気学を引き合いに出しながら，直感的に理解できるよう要領よくまとめてある．ハナニー・ウィッテン効果やマイヤー効果といった初学者には難しいと考えられるトピックのエッセンスを「物理的に」かみくだいて解説する筆の運びは秀逸である．一つ残念なのは，「超重力古典解としてのブレーン」というテーマについてはあまり触れられていない，という点であろうか．著者はその辺りについても広範な知識をお持ちのはずだが，そこまでは欲張りすぎだろうか？

最初に「ストリング理論は難しい」と述べたが，本書は初学者ができるだけ直感的にストリング理論のエッセンスを把握できるようにと意図して書かれた良書である．微分形式や高次元のスピノルといった，物理の学生が通常学部では教わらないテーマについても，不要に数学的になりすぎず，手際よく解説してある点も本書の長所である．もちろん本書だけでストリング理論の基礎がすべてマスターできるわけではないが（「学問に王道なし」である！），これからストリング理論の勉強を始めようという学生や，より本格的な分厚いテキストを勉強していて「壁」を感じていた諸兄に間違いなくお勧めできる一冊である．

菅原　祐二（立命館大学理工学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

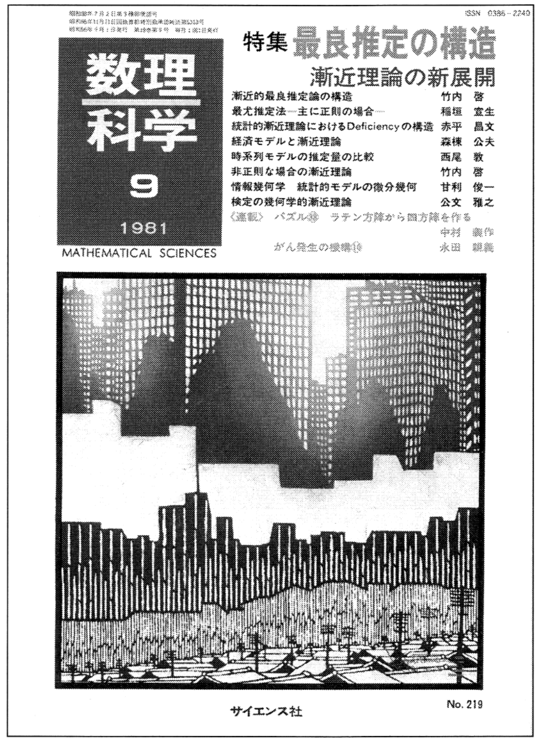
赤平 昌文

1981年9月号

数理統計学の分野では1970年代後半に統計的漸近理論の研究の新たな展開が始まり，その発展を3段階として捉えることができよう．幸運にも私はその最初からその研究の坩堝に居合わせることができ，1981年にその研究成果をまとめてSpringerのLecture Notesシリーズの1冊として刊行し，その研究の第1段階の幕が下ろされた．第2段階に入る頃にベルギーのリンバーグ大学に客員教授として招聘され，そこでまとめた当時の最新成果が30年前の本誌9月号に掲載された．

それより以前は，未知母数θをもつ母集団分布からの大きさnの無作為標本に基づいてθの推定量の良さを評価する場合に，分布に正則条件を課して，nが無限に大きいとき漸近的に正規分布に従う推定量の漸近分散を比較していた．一方，Fisher（1925）は情報量損失の観点から，最尤推定量は漸近有効推定量全体のクラスの中で漸近的に情報量損失を最小にすると予想し，多項分布の場合に最小カイ2乗推定量の情報量損失を計算した．しかし，情報量損失の基になるFisher情報量の概念そのものの意味が必ずしも明確ではないという理由から，もっと明解に，真の母数の周りでの推定量の集中確率を漸近的に高次の次数まで評価する研究が1970年代の後半から始まった．それを積極的に担ったのは，当時，日本では東大の竹内啓教授と私，旧西ドイツではケルン大学のPfanzagl教授らのグループ，インドではインド統計研究所のGhosh教授らのグループで，この高次漸近理論の研究が競って精力的に行われた．

第1段階では主要な研究成果として，適当な正則条件の下では偏り補正された最尤推定量，ベイズ推定量は3次の漸近的有効であることなどを得た．第2段階では，まず，漸近有効推定量の情報量損失との関連をDeficiencyの概念を通して明らかにし，その成果が本誌No.219に掲載された．また，Deficiencyの概念は統計的曲率と密接な関係があり，当時，東大の甘利俊一



教授，公文雅之氏らによって微分幾何学的観点から接続の概念も用いて高次漸近理論の研究が開始され，その当時の成果も本誌No.219に掲載されている．さらにその研究は発展し，今や情報幾何の分野にまでなっている．第3段階で，高次漸近理論は，細谷雄三氏（当時，東北大），谷口正信氏（早大），柿沢佳秀氏（北大）らによって時系列の場合に，また吉田朋広氏（東大）らによって確率過程の場合に拡張された．今や，日本は統計的推測の高次漸近理論の世界的な拠点に成長していて，今後，そこで得られた多くの成果が数理科学，医薬学，経済学，数理ファイナンス等の分野でより盛んに生かされることを心から期待している．

（あかひら・まさふみ，筑波大学）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

最終回 —立式で鍛える論理的思考法—

逆問題

堤　正義

1. 序

すべての物理現象は基本的な物理法則によって記述することができるという認識は，広く受け入れられているが，実際に物理現象を記述しようとすると，現実の世界は，多くの要素が絡み合う複雑な多体問題なので，統計的な観点を用いて平均化したり，無視できる物理量を省略したり，未知の要素をブラックボックス（仮に既知）として適当な物理モデルを作り，式を立てざるを得ない．この物理モデルを作って，それに基づいて方程式を立て，それを解いて現象と比較することをまとめて，**順問題**を解くという．このとき，未知の要素は多くの場合実験的事実によって既知と考える．

ところで，逆に未知の要素を観測データを用いて，方程式から間接的に推定できる場合がある．その推定のプロセスを**逆問題**を解くという．逆問題は，その性格上，データの変動に極めて敏感で，いわゆる非適切な問題になる．逆問題の解法では，得られた解が適切かどうかを最終的には人間が判断することが必要になる．そのための特有の理論とアルゴリズムを構築することが逆問題研究の主要な課題であって，「現象から式を作り出すという」ことは，本来的に順問題なのである．逆問題の理論は，CT などの医療画像工学や，地震探査，天文学など様々な分野で用いられているのだが，ここでは，量子力学的現象が巨視的に観察できる現象のうち，その研究が量子論発見の端緒となった最も古典的な**空洞輻射**と**比熱**の順問題とそれに関する逆問題を扱うことにしよう．

2. 空洞輻射と固体の比熱

18 世紀に確立されたニュートン力学，マクスウェルの電磁気学，ボルツマンやマクスウェルの統計力学は，巨視的な世界の多くの現象を説明することに成功した．しかし，この多大な成功にも関わらず，18 世紀の終わりまで，空洞輻射（黒体輻射）の問題は，今までの古典理論ではうまく説明できず，未解決のままであった．さらに，18 世紀の終わりに，古典的物理の枠内では現象を説明できない陰極線，X 線，放射能などが発見された．

これを解決したのがプランクによる 1900 年における「**エネルギー量子**」の発見で，これを契機に微視的な世界を記述する量子力学が生み出された．

「空洞輻射の問題」というと，筆者は，いつも，朝永振一郎博士が，1948 年に執筆した名著『量子力学』第 1 巻を思い起こす．1956 年に博士がノーベル賞を受賞したとき筆者は 21 才であった．その当時，博士の著作は本屋の店頭に山積みされ，多

くの人が購入した．筆者も早速購入して何度も読み返したことが思い起こされる．

『量子力学』第1巻では，プランクによる「空洞輻射の問題」の解決とアインシュタインにより光の粒子性の仮説，さらにはハイゼンベルグによる行列力学が扱われていて，どのようにして，量子力学が誕生したのかが，分かりやすく丁寧に書かれている．そのうち，最初の50余頁が「空洞輻射の問題」の解説とそのプランクによる解決に充てられている．彼の著書のストーリーに従って，それを解説しよう．

1 熱的なつりあいの状態において，温度 T の壁で囲まれた室（空洞）の中には，どのようなスペクトルの光が存在するか．これが，いわゆる空洞輻射の問題である．これを，一言でいうと「ある温度に熱せられた物体はどういう色の光を出すか」となる．この光のスペクトルは，温度 T だけに関係して，壁の性質，空洞の形あるいは大きさによらないことがキルヒホッフによって証明された．

2 熱溜の中の固体やガスに対する比熱を**ボルツマンの原理**に基づく**エネルギー等分配の法則**を用いて計算すると，温度が低いところでは実験結果に合わなくなる．

比熱の計算の概略を示そう．物体が温度 T の熱溜の中で熱平衡の状態にあるとする．物体を記述する自由度 f の力学系の状態は，位置座標 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_f)$ と対応する運動量 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_f)$ で記述される．系の運動エネルギーは，一般に

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^{f} \alpha_j p_j^2$$

で与えられる．但し，α は位置座標に依存する非負関数．位置エネルギーを V とすれば，系の全エネルギーは $E = E_{kin} + V$ である．このとき，ボルツマンの原理によって s 番目の自由度の運動エネルギーの平均値 $\langle \alpha_s p_s^2 \rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle \alpha_s p_s^2 \rangle &= A \int \alpha_s p_s^2 e^{-\frac{1}{k_B T} E(q,p)} dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f \\ &= \frac{1}{2} k_B T\end{aligned}$$

で与えられる．k_B はボルツマン定数．これがエネルギー等分配の法則である．全エネルギーの温度に関する微分が比熱であるから，これを用いて，種々の物体の比熱が計算できる．

1モルの結晶体が熱溜の中で熱平衡の状態にある場合を考える．結晶を作る原子は規則正しい格子状に並び，絶対温度0の位置から不規則に振動していて，それらは固有振動の重ね合わせで表されるとする（問題の単純化）．このとき，s 番目の固有振動を記述する座標を q_s，対応する運動量を p_s とすると，そのエネルギーは，正弦振動体のエネルギー $E_s = a_s q_s^2 + b_s p_s^2$ の形で与えられる．正弦振動系において，運動エネルギーの時間平均と位置エネルギーの時間平均が等しいことを用いるとエネルギー等分配の法則より，エネルギーの平均値は

$$\langle E_s \rangle = \langle a_s q_s^2 \rangle + \langle b_s p_s^2 \rangle = k_B T$$

となる．固有振動系の個数を f とすると1モルの結晶系のエネルギーの平均値は

$$\langle E \rangle = f k_B T$$

である．結晶体の原子の個数を N とすると，固有振動数の個数は $f = 3N$ とできる．このとき，1モルの結晶のもつ熱エネルギーは $U = 3Nk_BT = 3RT$ で，モル比熱は $C = 3R = 5.85$ カロリー/度 である．固体の比熱が $3R = 5.85$ に近い値であることは，デュロン–プティーの法則として以前から知られていた．

1原子理想気体の分子は，質点と扱うことができ，気体が十分薄ければ，分子間の位置エネルギーは無視できる（物理モデルの簡単化）．このとき，全エネルギーは

$$E = E_{kin} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m} (p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2)$$

である．ただし，m は分子の質量で，p_{n_x}, p_{ny}, p_{nz}

は n 番目の分子の運動量の x, y, z 成分を表す．また N は1モル中の分子の総数である．このとき，エネルギー等分配の法則より，1モルの気体の全エネルギーの平均値は

$$\langle E\rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m}(\langle p_{nx}^2\rangle + \langle p_{ny}^2\rangle + \langle p_{nz}^2\rangle) = \frac{3N}{2}k_B T$$

となる．よって，1 原子気体 1 モルの比熱は $C = \frac{3}{2}R = 2.97$ カロリー/度, $(R = Nk_B)$ である．

これらの結果は，温度が低いところでは，いちじるしくはずれている．

3　2 の結果を拡張して，空洞輻射を熱溜の中に「真空」を入れたとき，すなわち電磁波だけが存在すると考えて，その比熱を求める．電磁波は，空間格子振動と同様に固有振動の重ね合わせで表現できるから，固体の比熱と同様の法則が成り立つ．よって，電磁波の固有振動数は無限大であるから，エネルギー等分配則が成り立つとすると，その全エネルギーも比熱も無限大になることがわかる．しかし，実験的には，空洞の全エネルギー U は有限で，そのときの温度を T とすると**シュテファンの法則** $U = \sigma T^4$ が成り立っている．これは，電気振動の各自由度に分配されるエネルギーに対して等分配の法則が成り立っていないことを示している．これを解析するには，各自由度，すなわち，各固有振動数におけるエネルギーを別々に測ることが必要である．いいかえると，エネルギーのスペクトル分布が分かれば良い．

4　等分配の法則が成り立つとすると，エネルギーのスペクトル分布に対して**レイリー–ジーンズの公式**が成り立つ．この公式では，空洞から出る光の明るさは，温度 T に比例するが，光のスペクトル分布は温度に無関係なので光の色は，温度に関係しない．これは，実験と合致しない．しかし，温度の高いところでは，実験と合っている．レイリー–ジーンズの公式を導こう．

弦の振動をモデルに，スペクトル ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数の個数 $Z(\nu)d\nu$ を求めて，それを2次元，3次元の振動の場合に拡張する．それを横波の場合に拡張して空洞内の電磁波のスペクトルの個数とみなす．振動数の個数が変わらないように，壁に小さな穴を空けて外の熱溜と熱的つりあいの状態にする．これを式を用いて示そう．

まず，長さ L の固定端の弦の上を速さ $c > 0$ で伝わる弾性波 $u(x,t)$ は

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を満たす．この固有振動解は

$$u_s(x,t) = 2A\sin\frac{\pi s x}{L}\cos\frac{\pi s c t}{L} = A\left(\sin\frac{\pi s(x-ct)}{L} + \sin\frac{\pi s(x+ct)}{L}\right), \quad s = 1, 2, \cdots$$

で与えられる．ただし，$2A$ は振幅で，振動数は

$$\nu_s = \frac{c}{2L}s, \quad s = 1, 2, \cdots$$

となる．よって，弦の固有振動の振動数は，$\varDelta = \frac{c}{2L}$ の等間隔に並んでいるから，ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数の個数 $Z(\nu)d\nu$ は

$$Z(\nu)d\nu = \frac{d\nu}{\varDelta} = \frac{2L}{c}d\nu$$

で与えられる．これを，3 次元に拡張する．振動数は

$$\nu_{s_x,s_y,s_z} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}\,\frac{c}{2L}$$

となる．ただし，(s_x, s_y, s_z) は正の整数の組である．これを，$\mathbb{R}^3$ 内の体積 $\frac{c^3}{(2L)^3}$ の碁盤目の点（格子点）

$$x_{s_x} = \frac{c}{2L}s_x, \quad y_{s_y} = \frac{c}{2L}s_y, \quad z_{s_z} = \frac{c}{2L}s_z$$

と原点までの距離と考えると，ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数の個数 $Z(\nu)d\nu$ は，半径 ν と半径 $\nu + d\nu$ の球に囲まれた部分の第一象限にある碁盤目の点 $(x_{s_x}, y_{s_y}, z_{s_z})$ の個数を数えれば良い．1 つの碁盤目の体積は $\varDelta^3 = \frac{c^3}{(2L)^3}$ で，2 つの球に挟まれた部分の体積は $\frac{4\pi}{3}((\nu + d\nu)^3 - \nu^3) \simeq 4\pi\nu^2 d\nu$ である．よって，求める個数は

$$Z(\nu)d\nu = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{8\Delta^3} = \frac{4\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

である．空洞輻射の場合，速度 c は光速で，電磁波は横波だから，同一の s_x, s_y, s_z を有する振動は 2 種ずつあるので，求める個数は

$$Z(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

である．振動数の個数が変わらないように，壁に小さな穴を空けて外の熱溜と熱的つりあいの状態にする．等分配の法則が成り立つとすると，エネルギーのスペクトル分布に対して

$$E(\nu)d\nu = Z(\nu)d\nu k_B T = \frac{8\pi L^3}{c^3}k_B T\nu^2 d\nu$$

が成り立つ．よって空洞の単位体積あたりのエネルギーのスペクトル分布は

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2 d\nu$$

となる．これがレイリー–ジーンズの公式である．

5 ウィーンは，熱力学的考察（断熱的体積変化と熱力学の第二法則）により**ウィーンの「ずれ」法則を導き**，さらに，それに不自然な仮定を用いて空洞輻射におけるエネルギーのスペクトル分布に対して，ヒューリスティックな**ウィーンの公式**を導いた．その論法は，受け入れ難いものであったが，温度が十分に低いところでは，実験とよく合っている．式を用いよう．断熱変化において，

$$\frac{E_s}{\nu_s} = \text{定数}, \quad \frac{\nu_s}{T} = \text{定数}$$

が成り立つことから，s 番目の固有振動に分配されたエネルギー E_s は，適当な関数 $F(x)$ を用いて

$$E_s = F\left(\frac{\nu_s}{T}\right)\nu_s$$

の形に書ける．このとき，空洞の単位体積あたりのエネルギーのスペクトル分布は

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}F\left(\frac{\nu}{T}\right)\nu^3 d\nu.$$

となる．これが，ウィーンの「ずれ」法則である．$F(x) = \frac{k_B}{x}$ とすると，レイリー–ジーンズの公式をえる．さらに，ウィーンは，

$$F(x) = k_B\beta e^{-\beta x}$$

を仮定して，ウィーンの公式

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B\beta}{c^3}e^{-\beta\nu/T}\nu^3 d\nu.$$

を得た．この公式で，定数 β を適当に選ぶと，温度が低い $\frac{\nu}{T} \geq 10^{11}$ の範囲で，実験とよく合うことが見出された．

6 プランクは，$F(x)$ として

$$F(x) = \frac{k_B\beta}{e^{\beta x} - 1}$$

を仮定した．このとき，

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B\beta}{c^3}\frac{1}{e^{\beta\nu/T} - 1}\nu^3 d\nu.$$

これが**プランクの公式**である．関数 $F(x)$ は，x が大きいところで，$k\beta e^{-\beta x}$ を近似し，x が小さいところで，$\frac{k_B}{x}$ を近似しているので，レイリー–ジーンズの公式とウィーンの公式をつなぐ内挿公式を与えているといえる．ここで，$h = k_B\beta$ をプランク定数と呼ぶ．β すなわち，h の大きさは実験との比較で決められた．このプランクの公式は，実験して得たすべての温度，振動数の範囲で，実験データとよく整合した．

プランクは，自分の得た公式に内在する法則を考え，エネルギー量子の考えに至った．これが量子論の端緒となった．

7 プランクの導いたエネルギーのスペクトル分布則を用いて，アインシュタイン，ちょっと遅れて，デバイは固体の比熱理論を作り直して実験的事実と比較し，エネルギー量子という考えが，空洞輻射という電気振動のみならず物質の振動においても成立することを示した．
（アインシュタインの理論は，低温度部分で定量的には実験と食い違い，デバイの理論にも理論と実験が合わない部分がある．デバイと同時期にボルンとフォン・カルマンは，デバイより，より正確な物理像を与える理論を作ったが，デバイのように数学的に簡単ではなく，一般に広まらなかった．）

このようにして，空洞輻射と固体の比熱の研究

から，量子力学が誕生したのであるが，このすべてのアプローチにおいて，現象に対して基本的物理法則により物理モデルを考えて式を立て，それを解析して実験的事実を説明しようと試みている．この際，空洞におけるスペクトル分布や，結晶格子のスペクトル分布は，一般には未知である．そこで簡単な場合を想定しそれを既知と考えて，各温度における全エネルギーや比熱を導き，それと実験結果を比較している．このとき，後で示すように，格子のスペクトル分布を既知と考えれば，全エネルギーや比熱は，温度をパラメータとして含む積分方程式で表される．

逆に，格子比熱をすべての温度 T にわたって求めることができれば，形式的にはこの積分方程式を逆に解くことによってスペクトル分布を求めることができると考えられる．1942年に，モントロール（E.W. Montroll）は，論文[3]でこのことを指摘していた．これが，格子比熱の逆問題である．この逆問題の数値計算は膨大な計算量を必要とし，電子計算機が必要であった．

1970年代，その当時急速に発達してきた電子計算機を用いて，ロシアの数理物理グループが，この問題の数値解析を試みた．その際，数学者チホノフ（A. Tikhonov）の**正則化理論**が用いられ，その理論の有効性が確認された[4]．

一方，空洞輻射（黒体）輻射の問題において，温度を一定にせず，温度分布を考えてスペクトルを固定してその全エネルギーを求める問題に対する逆問題は，1980年代にボヤルスキー（N.N. Bojarski）[1]によって最初に提案され，それ以後その流れで多くの研究がなされている（発表されている雑誌の専門領域が格子比熱の逆問題とは異なることに注目してほしい）．

空洞輻射の逆問題の物理モデルは，物理的に不自然な感じもするが，数学的には，固体の比熱の逆問題と実はほとんど等価であるといってよい．次の節では，固体の比熱の逆問題のみを概説する．

3. 格子比熱の逆問題

前述のボルン–フォン・カルマン理論においては，結晶と同じように同じ結合定数と力の定数をもつ連結した振動子の集合の方程式（格子波方程式）を導出して，その基準振動が N^3 のオーダーの永年行列式の特性根であることを示す．基準振動 $\boldsymbol{q}$ に対する永年行列式の根をすべて求めて，ν と $\nu + d\nu$ に入る振動数の個数を数え上げれば，振動数分布は求められる．これによって，振動数分布を数値計算により実際に計算することが可能になる．しかし，いまのところ数値計算以外に有効な手立てはない．そこで逆に，固体比熱の実験データから，振動数分布を計算することが考えられる．この逆問題を解くためには，まず，振動数分布が分かっているとして，振動数分布と比熱の関係式を求めることが必要である．

格子波は熱によって励起される．比熱の計算は量子化して考える．格子方程式はカノニカルな座標変換によって，1組の独立な調和振動子の運動方程式になる．従って，この励起の量子（**フォノン**）はボーズ–アインシュタイン型でなければならない．すなわち，基準振動 $\boldsymbol{q}$ にはエネルギー $\hbar\nu_q, (\hbar = \frac{h}{2\pi})$ のフォノンをいくらでも与えることができる．よって，統計力学の理論より基準振動 $\boldsymbol{q}$ には，平均して

$$\overline{n}_q = \frac{1}{e^{\hbar\nu_q/k_B T} - 1}$$

個のフォノンが存在し，それらが寄与するエネルギーは

$$\overline{E_q} = \left(\overline{n}_q + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu_q$$

である．よって，系の全エネルギーは，

$$\overline{E} = \sum_q \frac{\hbar\nu_q(e^{\hbar\nu_q/k_B T} + 1)}{2(e^{\hbar\nu_q/k_B T} - 1)}$$

で与えられる．ただし，和はすべての基準振動にわたって取る．$\mathcal{D}(\nu)$ を $g(\nu)d\nu$ が区間 $[\nu, \nu + d\nu]$ に存在する振動数を持つ基準振動の個数を表すものとすると，単位格子あたり n 個の原子を持つ結

晶構造には全部で $3nN$ 個の基準振動が存在して

$$\overline{E} = 3nN \int_0^\infty \frac{\hbar\nu(e^{\hbar\nu/k_BT}+1)}{2(e^{\hbar\nu/k_BT}-1)}\mathcal{D}(\nu)d\nu$$

となる．比熱はエネルギーを温度で微分したものであるから

$$C_V(T) = \frac{\partial\overline{E}}{\partial T}$$
$$= 3nNk_B \int_0^\infty \left(\frac{\hbar\nu}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{\hbar\nu/k_BT}}{(e^{\hbar\nu/k_BT}-1)^2}\mathcal{D}(\nu)d\nu$$

である．簡単のために，$u = \frac{\hbar}{k_BT}$, $h(u) = \frac{C_V(T)}{k_B}$ とすると

$$\int_0^\infty (\omega u)^2 \frac{e^{\omega u}}{(e^{\omega u}-1)^2} g(\omega)d\omega = h(u),$$
$$u \in (0,\infty) \qquad (1)$$

となる．

逆問題は $h(u)$ を知って，$g(\omega)$ を決定する問題である．すなわち，写像

$$\mathscr{G} : g \mapsto \int_0^\infty (\omega u)^2 \frac{e^{\omega u}}{(e^{\omega u}-1)^2} g(\omega)d\omega$$

を定義して，問題

$$\mathscr{G}[g](u) = h(u) \qquad (2)$$

の逆変換公式を求めることになる．ヒルベルト空間 X, Y を写像 $\mathscr{G} : X \to Y$ が連続（コンパクト）になるようにとると，逆写像 $\mathscr{G}^{-1}$ は非有界になる．従って，逆問題は非適切である．

以下に，形式的に逆変換公式を求める 2 つのアプローチを紹介する．

一つは，1942 年のモントロールの論文で示されて，1990 年頃に再発見された**メリン変換**による方法で，もう一つは，数学的には少なくとも数論の世界では，19 世紀には知られていて，1990 年に物理学者チェン（N-X. Chen）によって再発見された**メビウス逆変換公式**による方法である（実は同じ方法ともいえる）．

$s \in \mathbb{C}$ に対して，変換 $f \mapsto \mathcal{M}[f]$:

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)dx$$

を，メリン（Mellin）変換と呼ぶ．

このとき，次の補題が成り立つ．

補題 1 $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Re}(a) > 0$ とする．ガンマ関数は

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$
$$= \mathcal{M}[e^{-x}](s) = a^s\mathcal{M}[e^{-ax}](s)$$

と書ける．また，ゼータ関数について，

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}dx$$
$$= \mathcal{M}[e^x-1](s) = a^s\mathcal{M}[e^{ax}-1](s)$$

が成り立つ．さらに，$\zeta(s)$ は，$\mathbb{C}\backslash\{1\}$ で正則であり，関数方程式

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\Gamma(1-s)$$

を満たす．

補題より

$$a^{-s}\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{ax}-1}dx.$$

この両辺を a で微分すると

$$sa^{-s-1}\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^s e^{ax}}{(e^{ax}-1)^2}dx.$$

よって，

$$s\zeta(s)\Gamma(s) = a^{s+1}\int_0^\infty \frac{x^s e^{ax}}{(e^{ax}-1)^2}dx$$

を得る．よって，(1) の両辺にメリン変換を適用すれば

$$\mathcal{M}[h](s)$$
$$= \int_0^\infty u^{s-1}u^2\left(\int_0^\infty \frac{\omega^2 e^{u\omega}g(\omega)}{(e^{u\omega}-1)^2}d\omega\right)du$$
$$= \int_0^\infty \omega^2 g(\omega)\left(\int_0^\infty \frac{e^{u\omega}}{(e^{u\omega}-1)^2}u^{s+1}du\right)d\omega$$
$$= (s+1)\zeta(s+1)\Gamma(s+1)\int_0^\infty \omega^{-s}g(\omega)d\omega$$

となるから

$$\mathcal{M}[h](s) = \zeta(s+1)\Gamma(s+2)\mathcal{M}[g](1-s)$$

が得られる．よって，形式的に

$$\mathcal{M}[g](s) = \frac{\mathcal{M}[h](1-s)}{\zeta(2-s)\Gamma(3-s)}$$

が成り立つ．さらに，形式的にメリン逆変換を施すと，適当な $\sigma \in (0,1)$ に対して

$$g(u) = \mathscr{G}^{-1}[h] = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{-s} \frac{\mathcal{M}[h](1-s)}{\zeta(2-s)\Gamma(3-s)} ds \quad (3)$$

が成り立つ．これが求める逆変換公式である．

次に，チェンのアプローチを紹介しよう．まず，

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{1-e^{-\omega u}} = \frac{\omega e^{-\omega u}}{(1-e^{-\omega u})^2}$$

であり，

$$\frac{1}{1-e^{-\omega u}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\omega u}$$

が，$(0,\infty)$ で t,ω について局所一様に絶対収束することから，項別微分すると，

$$\frac{e^{\omega u}}{(e^{\omega u}-1)^2} = \frac{1}{e^{\omega u}(1-e^{-\omega u})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\omega u}$$

となる．これを，積分方程式 (1) に代入すると，右辺の級数が ω について局所一様に収束することより積分と無限和が交換できて，積分方程式 (1) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \omega^2 e^{-n\omega u} g(\omega) d\omega = \frac{h(u)}{u^2}$$

となる．$n\omega = \nu$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\nu u} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 g\left(\frac{\nu}{n}\right) d\nu = \frac{h(u)}{u^2}.$$

よって，

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu u} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 g\left(\frac{\nu}{n}\right) d\nu = \frac{h(u)}{u^2} \quad (4)$$

を得る．そこで，

$$G(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 g\left(\frac{\nu}{n}\right)$$

とおくと，

$$\frac{h(u)}{u^2} = \int_0^{\infty} e^{-\nu u} G(\nu) du = \mathscr{L}[G](u) \quad (5)$$

が成り立つ．ただし，$\mathscr{L}[G]$ は関数 G のラプラス変換である．よって，形式的に

$$G(\nu) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{h(u)}{u^2}\right](\nu)$$

であり，メビウス反転公式を用いると，求める逆変換公式は

$$g(\nu) = \mathscr{G}^{-1}[h](\nu) = \nu^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) G\left(\frac{\nu}{n}\right) = \nu^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{h(u)}{u^2}\right]\left(\frac{\nu}{n}\right) \quad (6)$$

となる．ここで，$\mu(n)$ はメビウス関数で，次式で定義される．

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ (-1)^r, & n\text{ が相異なる } r \text{ 個の素因数に分解されるとき}, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

また，$\mathscr{L}^{-1}$ はラプラス逆変換である．

観測データより，逆変換公式を用いて $g(\nu)$ を求めようとすると，メリン逆変換，ラプラス逆変換の実解法が必要になる．それらは，結局非適切な積分方程式の離散化をすることになり，もともとの問題の非適切性はどんなアプローチをしても残る．どの段階でも，チホノフの正則化理論を初めとする種々の正則化理論が有効であることが多くの研究者によって調べられている．残念ながら非適切問題の正則化理論については，紙数の関係で割愛せざるを得ない．

参考文献

1) N.N. Bojarski, "Inverse Black Body Radiation", *IEEE Trans. Antenna Propag.* **30** (1982) 778–780.
2) Nan-Xian Chen, "Modified Möbius Inverse Formula and Its Applications in Physics", *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1193–1195 (1990).
3) E.W. Montroll, "Frequency Spectrum of Crystalline Solids", *Journal of Chemical Physics*, **10**, 218–229 (1942).
4) A.N. Tikhonov and V.Y. Arenin, *Solution if Ill-posed Problems*, NewYork Wiley, 1977.
5) 朝永振一郎『量子力学』第一巻，東西出版社，1948.
6) 堤正義『逆問題の数学』共立出版，2000.

（つつみ・まさよし，早稲田大学理工学術院）

坂田昌一

その物理と方法

亀 淵 迪

1. はじめに——研究と方法

湯川秀樹と朝永振一郎がともに京大物理学科を卒業し研究生活に入ったのは1929年であるが，この時点でもってわが国の素粒子論研究は呱々の声をあげたとしてよいであろう．同じく京大物理学科を出た坂田昌一（1911–1970）がこれに加わったのは4年後のことである．以来1950年代にかけてこの三者は，たんにわが国のみならず，世界の素粒子論をリードすることとなる．

それぞれに研究態度を異にする三者であったが，中でも坂田は異色であり，“研究を行うに当っては，自らの方法論を意識的に適用している”と公言して憚らなかった．旧制高校時代，先輩に勧められて読んだエンゲルスの『自然弁証法』に深い感銘を受け，これが彼の生涯にわたっての方法，さらには思想の骨子となる．筆者自身は本書や，その基礎をなす唯物弁証法を知悉する者ではないが，これに影響を受けたと思われる彼の方法の特徴は——その傍らにあって観察した限りでは——以下のように纏められるかと思う[1)]．

1) 徹底的に唯物論的であったこと：理論上の困難に直面した場合，計算方法や理論自体の変更などよりも，その背後には必ず原因となるべき物質的な実体があるに違いないと考えた．彼自身の用語を用いるならば「形の論理」よりも先ず「物の論理」を重視したと言える．2) 彼の解決法は，多くの場合，模型の変更にあった．素粒子論における‘模型’とは，どのような素粒子が，どのような相互作用でもって当該現象に関与しているかの規定である．彼の模型は独特の感覚（勘）によって見出されたものであり，視覚的で単純明快であった．朝永の構成力をマックスウェルに喩えるならば，坂田の感覚力はファラデイ的であった．3) 理論上の矛盾をば新しい発展への契機として捉え，矛盾のない場合よりも重視した．例えば，繰り込み理論の全盛期に，繰り込み不可能な相互作用の検討を勧めた．4) 自然の構造は質的に異なる無限の「階層」の連鎖であるとし，レーニンの“電子といえども汲み尽くせない”という言葉を屡々口にした[2)]．これは，ある段階で階層が完結するとした湯川や，近年喧伝されている‘theory of everything’とは全く対蹠的な考え方である．

しかしながら，つねに同一の方法でもって問題と対峙する坂田流には，いろいろと批判もあった．例えば自由人渡辺慧は，富士登山にも“御殿場口もあり大宮口もある”とし，登頂という目的を果たす手段は唯一ではないと主張した[3)]．私見では，しかし，方法は所詮手段に過ぎず，要はそれがどの程度に目的を達成し得るのかに懸かっている，と



写真1　研究室での坂田先生（1967年）—名古屋大学提供.

思うのであるが….

坂田の研究経歴は3期に区分される．小文では，方法論との関連に留意しつつ，各期の主要業績を辿ってみたい．

2. 第I期——中間子論

研究経歴の第I期（1933–1942）は，言わば徒弟時代であり，湯川の協力者として阪大・京大にて中間子論の定式化に従事．しかしその終盤には「中性中間子の光子崩壊」,「二中間子論」等の重要な貢献がある．

2.1 湯川中間子論の困難

1935年湯川の予言した‘湯川中間子’は，それが媒介する核力の到達距離から，その質量をほぼ$200\,m_e$（m_e：電子質量）と取っていた．他方，1937年に至り，米国のC.D.アンダーソンやわが国の竹内（柾）らが宇宙線中に，この程度の質量をもつ粒子（以下‘中間子’）を発見する．当初はこれぞ湯川中間子かと事態は緊迫したが，調査が進むにつれて矛盾が露呈してくる．即ち，湯川理論から期待される値に比して，(1)‘中間子’の寿命が100倍程度長いこと，(2) 低速‘中間子’の散乱断面積が1/100程度に過ぎないこと，である．この矛盾を如何に解決するのかは，場の量子論における発散の問題（後述）と併せ，当時の（わが国の）素粒子論における二大問題となった．

1943年9月末に開かれた「中間子討論会」*1) において坂田は，次のように状況を分析する[4]．

“中間子論の現状の様に，この結論が実際とひどく喰違っていたり，自分自身の中に矛盾を含んでいる様な場合にはその困難の原因を… (i) 模型の適否，(ii) 量子論の適用限界，(iii) 数学的方法の可否の三点に就て注意深く検討せねばならない．もとより個々の困難に於てはこれら三つの原因が複雑な仕方でからみ合っているであろうし，又将来の正しい理論に於ては恐らくこの三者即ち対象と法則と方法は分離出来ない統一にあるらしく予想される”．

ここには坂田方法論が如実に示されている．

さて，上記三種の解決法について，(ii) を選んだのは湯川であり，局所的場の理論の改変こそ急務だとした．また朝永は (iii) を採り，従来の摂動近似に代るべき「中間結合」や「強結合」の近似方法を検討した．これに対し坂田の選んだのは (i)，即ち模型の変更であり，結局は彼に軍配が上がったのである．まことに坂田方法論の勝利であった．

2.2 二中間子論

坂田の解決は直截明快であった．‘中間子’が湯川中間子の性質をもたないのは，両者が全く別物だからと断じたのである．彼の模型では*2)，湯川の過程 $N \rightleftarrows P+\pi^-$, $\pi^- \rightleftarrows e^- + \bar{\nu}_e$ の他に $\pi^- \rightleftarrows \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ を仮定する．$\pi^\pm$ は‘強い相互作用’をもつ‘ハドロン’であるが，$\mu^\pm$ はそれをもたない‘レプトン’であるとした．その結果，もし $m_\pi > m_\mu > m_e$, $m_\nu \approx 0$ ならば，二重の自然崩壊 $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ （およびこの荷電共役過程）が可能となる．

この研究は邦文で1942年に，英文では戦後の1946年に発表された（井上（健）と共著）．他方，1947年に至りC.F.パウエルのグループが，宇宙線実験により，$\pi^\pm$ の存在および上記の二重崩壊

*1)　戦時中にも拘わらず，（1941～43）の期間，このような研究会が開かれていた．この戦時中の蓄積が戦後のスタート・ダッシュを可能にした．

*2)　混乱を避けるため，現行の記号を用いる：P = 陽子，N = 中性子，$\pi^\pm$ = 湯川中間子，$\mu^\pm$ = ‘中間子’，ν_e, ν_μ = ニュートリノ．また例えば $\bar{P} = P$ の反粒子，$m_P = P$ の質量．

過程を確認する*3)．π および μ 粒子の寿命（現在値）は $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}\,\mathrm{sec}$，$\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{sec}$ であり，湯川中間子 π は直ちに‘中間子’μ に崩壊し，宇宙線中に主として観測されるのは，強い相互作用をもたない μ 粒子であることになる．

二中間子論は，坂田の業績の中でも，次の二点において特異な地位を占める．第一に彼の方法論，とくに（1節で述べた）1)，2) が見事に成功した例であること，第二に当該問題についての決定版を与えたこと，以上である．

3. 第 II 期——発散の問題

研究経歴の第 II 期を（1943–1954）の期間とする．1942 年 10 月に 31 歳の若さで名大教授となり，以後自らの研究室（通称「E 研」）をもつことになる．戦中・戦後の時期に当たり，外国との交流が全く途絶し，素粒子についての新しい実験結果については知る術もなかった．そのため，本来はリアリストで‘物’に関心をもつ筈の坂田も，恐らくは不本意ながら，場の量子論の形式的な側面，即ち‘形’の問題に取組まざるを得なかったと思われる．

3.1 C 中間子論

1940 年代初頭，事情は湯川や朝永にとっても同様であり，両者はそれぞれの仕方で形式面での研究を行っていた．先ず湯川は発散の原因が素粒子の点模型にあるとし，終始黒板に，点に代るべき 4 次元領域を表す「丸（まる）」を画いていた．また朝永は，場の量子論を計算のすべての段階でローレンツ共変にする「超多時間理論」の定式化に取組んでいた．他方，坂田の採った方法は，飽くまでも坂田的であり，再び模型の変更による解決を模索したのであった．

電子と電磁場より成る系を取扱う量子論は「量子電磁力学」（QED）と呼ばれるが，ここでは，摂動の最低近似が実験とよく合うのに対し，高次近似を計算するとつねに発散してしまう．しかしよく調べてみると，すべての発散は，結局，（電子に対する）質量型の発散 δm と荷電型の発散 δe とに帰着することが判明する．

“電子と電磁場より成る系を考察する場合でも，この両者と相互作用をもつ他のすべての場をも同時に考慮せねばならぬ”とは，坂田の年来の主張である．δm が発散するのは，荷電 $(-e)$ を一点に押し込める際のクーロン発撥力が発散するからであり，これを打ち消すべき適当な凝集力を考慮すれば困難は消失する筈である．この方針の下に坂田と原（治）は，これを実現する最も簡単な模型として，電子は電磁場の他に中性スカラーの C 中間子場とも相互作用をもつ（結合定数 f）と仮定した．そして予想どおり，摂動の 2 次近似では，もし $f^2 = 2e^2$ ならば異符号の発散量は互いに打ち消し合い，δm が有限となることを見出した（1947）．“毒を以て毒を制す”わけである．

これに反し，荷電型の発散 δe に対しては，他に如何なる荷電場を導入しても，その寄与はつねに負符号の発散となり，「打ち消し法」は最早機能しなくなる．もっとも，この方法は光子質量の表式に現れる‘不定性’の除去には有効であったのだが（坂田・梅沢（博臣）の「混合場理論」）．

3.2 繰り込み理論への道

坂田の観点よりすれば，上記の結果は，δm と δe とが全く異質の発散であることを示している．しかし朝永はこの結果を次のように見た．先ず彼は坂田の方法がダイナミカルな問題でも有効であることを確める．次いで，問題を形式的に見直すならば，両種の発散は全く同じ仕方で取扱えることに着目する．即ち，任意の物理量の期待値を $F(m_e, e; \delta m, \delta e)$ とするとき，これは $F(m_e + \delta m, e + \delta e; 0.0) \equiv \bar{F}(\bar{m}_e, \bar{e})$ と書かれる（$\bar{m}_e \equiv m_e + \delta m, \bar{e} \equiv e + \delta e$）．$F$ も $\bar{F}$ もともに発散量であるが，‘繰り込まれた’質量 $\bar{m}_e$ や荷電 $(-\bar{e})$ に対してそれぞれの実測値を代入すれば，$\bar{F}$ は有限となる．これが「繰り込み法」の骨子である．驚くべきことに，$\bar{F}$ と実験値との一致は有効数字 8 桁にも及ぶ場合がある．まさに魔術と言うべし．

理論の（数学的）形式と（物理的）内容は，言わ

*3) ν_e と ν_μ が異種のニュートリノであることは 1962 年に実験的に確認される．因みに種々のニュートリノが同種であるか否かは，当初から坂田の重要視した問題であった．

ば車の両輪であるが，発展のある段階においては，形式上の変更のみが理論をより高次の段階へと浮揚させ得る場合がある――これに伴い物質像もまた高次化する．朝永の行ったのは，まさにこのことであった．坂田が繰り込み理論の一歩手前で止まってしまったのは，眼前の物質像に拘り過ぎ，ために形の論理よりも物の論理の方を重視したからと思われる．こうして大魚は擦り抜けた．

他方，坂田自身は繰り込み法を厳しく批判した――それは人間側の便宜的手続きに過ぎず，自然の本質を反映するものではない．むしろ，繰り込み不可能な場合の研究が，将来の理論への突破口となるであろう，とした．因みに現在の素粒子論は，坂田の立場とは正反対に，‘繰り込み可能性’ を模型形成上の一要件としている．さらに付言すれば，爾後の坂田は場の理論の適用限界を論じ，“場の理論は終った．革命は必至” と断じるに至る．しかしここでもまた予想に反し，場の理論は「ゲージ原理」という新しい血を得て，なおも生き続けることとなる．まことに歴史は紆余曲折であり，そして皮肉でもある．

4. 第 III 期――模型と構造

研究経歴の第 III 期は「坂田模型」提出（1955）から死去に至る（1955–1970）の期間である．1960 年以降は基礎物理学研究所において「素粒子の模型と構造」研究会を主宰し，自らも関与して「名古屋模型」，「新名古屋模型」等々を提案する．

4.1 1954 年の坂田

第 II，III 期の区切りを 1954 年としたのは，以下の理由からである．この年の四月末から約半年間坂田はコペンハーゲンの「ニールス・ボーア研究所」に滞在するが，その前後で彼の研究上の関心が ‘形’ から ‘物’ へと一変したのであった．外遊前は大学内外の要務に忙殺され，研究に割く時間は十分にはなかったが，ボーア研究所では久々に研究に専念し，日頃の遅れを取り戻すことが出来たと想像される．

他方，素粒子実験の分野では，まさに新しい気運が興りつつあった．1950 年前後より，最初は宇宙

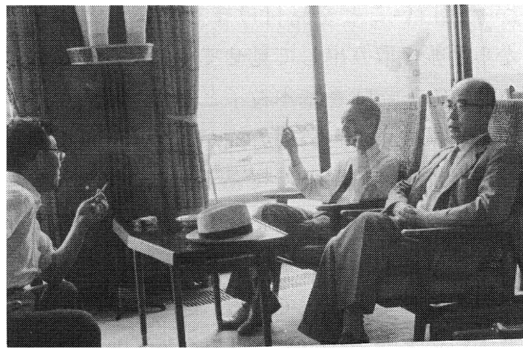


写真 2　右から湯川・朝永・坂田三先生（1960 年代か）―坂田家提供．

線中に，次いでは陽子加速器によって，いわゆる「新粒子」が続々と発見される：$\Lambda^0, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Xi^0, \Xi^-$; $K^{\pm}, K^0, \bar{K}^0, \cdots$．これら粒子は強い相互作用によって生成され易いのに，他の粒子には崩壊し難いという ‘奇妙な’ 性質を備えていた．これに対していろいろな説明が試みられたが，その中でも，中野（董夫）・西島（和彦），および両氏とは独立に M. ゲルマンによって提出された．いわゆる「NNG 則」が正しいらしい，ということが判明してくる．「奇妙な粒子」は従来の量子数の他に，「奇妙さ」と呼ばれる新しい量子数 $S(=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ をもっており，強い相互作用（による反応の前後）では，S の総和は保存する，とする説である．

‘物’ 主義者の坂田が，この新事実に着目しない筈がない．実際，折々のコペンハーゲン便りの中で，坂田は頻りに NNG 則の重要性を強調し始めるようになる．そして 11 月始めに帰国したときには，従来の ‘形’ 理論家から ‘物’ 理論家へと完全に相転移していたのである．坂田の新しい物理はこうして始まった．

4.2 坂田模型

その後も重粒子や中間子族の粒子，さらには各種の共鳴状態が続々と発見され，事態は原子核物理学の如き様相を呈してくる．そこで E 研コロキウムでも，これらの粒子を何かある「基本粒子」より成る複合系として考えられないか，といった問題が盛んに議論されるようになる．

1955 年秋のある朝，筆者が研究室にゆくと，坂

田が“面白いことを見付けましたよ”とポケットから手帳を取り出して見せてくれた．そこには $P, N, \Lambda(S=-1)$ を基本粒子として，他のハドロン粒子を構成するという方式がスケッチしてあった――「坂田模型」の誕生である．ここでは現象論的に導入された不可思議な量 S が，Λ 粒子の個数という物質的な量に具象化されている――形の論理の物の論理への転化である．

基本粒子として P, N と同じくスピン 1/2 の Λ を選んだのには，‘素粒子’の構造を原子核のそれの延長として考えたらしい節がある．1932 年の中性子 N の発見が，原子核理論にまつわる諸困難を一挙に解決したが，それと同様の役割を中性粒子 Λ に期待したかと思われる．なおこの仕事は同年 10 月中旬の物理学会で飛び入り講演として発表された．しかし一般の反応は鈍く，とくに理論の中堅層からは強い反論の声が挙がった．

反論の要点はこうである．この模型で例えば π 中間子は $\pi^+=(P\bar{N})$, $\pi^0=(P\bar{P}-N\bar{N})/\sqrt{2}$, $\pi^-=\overline{\pi^+}$ とされる．この種の束縛状態では，しかしながら，質量欠損が構成 2 粒子の質量和の 90%にも及び，極度に相対論的である．このような系を場の量子論を用いて具体的に取扱うことは殆ど不可能である，云々．しかし，こうした反論は坂田にとって，当然想定内のことであったと推測される．場の理論に見切りを付け，そのアンチテーゼとしての提案だったからである．

4.3 IOO からクォークへ

構想が如何に雄大でも，それがすぐ式に乗らないようでは，研究の現場では無視されがちになる．この苦境を救ったのが池田（峰夫）・小川（修三）・大貫（義郎）三氏による，いわゆる「IOO 理論」（1959–60）であった．彼等は P, N 間の「荷電不変性」*4) を拡張して基本粒子 P, N, Λ を全く等質であるとし，理論は $\psi \equiv (P, N, \Lambda)^{tr}$ に対して変換 $\psi \to \psi' = U(3)\psi$ の下で不変（対称）であると仮定した．ここに $U(3)$ は 3 行 3 列のユニタリ行列であり，重粒子や中間子の n 重項は $U(3)$ 群の n 次元既約表現に対応させられる．

IOO 理論は，坂田模型の場理論的定式化を可能にしたという点では賛(プロ)坂田的であった．しかし坂田が P, N, Λ 間の異質性を重視したのに対し，それらを全く等質とした点では反(コン)坂田的であった．要するに IOO 理論は，坂田の物の論理を一時棚上げにして，理論の浮揚を形の論理の変更に求めたと言える．

しかし坂田模型の救世主となった IOO 理論も，周知のように，最終的にはゲルマンや Z. ツヴァイクによる「クォーク模型」に取って代られることになる．坂田（や坂田学派）はここでも，最後の一歩を踏み込めなかったのである．

クォーク模型の基本粒子クォーク (u, d, s) は，重粒子数が（1 ではなく）1/3，荷電は（単位が e ではなく）それぞれ $2e/3, -e/3, -e/3$ をもつ．ゲルマンは当初，(u, d, s) をたんなる数学的記号であるとし，そこからの帰結のみに着目した．これに対して $U(3)$ 対称性の発見者大貫は，“現実の物理に反する重粒子数 $=1/3$，荷電単位 $=e/3$ を到底認めることが出来ず，これがクォーク模型への道を阻んだ”と述懐している[5]．形の論理に徹底したゲルマンに対し，やはり坂田学派には，‘現実の物’の論理への拘りが強かったようである．

4.4 名古屋模型その他

(a) 1959 年のキエフでの国際会議でロチェスター大のグループが，いわゆる「キエフ対称性」（坂田模型における弱い相互作用は，重粒子・レプトン間の変換 $P \leftrightarrow \nu, N \leftrightarrow e^-, \Lambda \leftrightarrow \mu^-$ に対して不変であること）について報告した．これに対して坂田ら名大グループはスカラー量の「B 物質」なるものを導入し，$P=\langle B^+\nu\rangle, N=\langle B^+e^-\rangle, \Lambda=\langle B^+\mu^-\rangle$ と考えた（1960）．ここに $\langle B^+l\rangle$ は通常の束縛状態とは異なり，“レプトン l に B^+ が乗り移って，これを重粒子に変える”のであり，この B^+ を坂田は‘超量子力学的物質’とした．リアリストの坂田にしては珍しい発言である．

後にニュートリノにも 2 種類（ν_e と ν_μ）あることが判明すると，この模型も「新名古屋模型」へと改変される（1962）．この新模型は，とくに ν_e,

*4) 核子 (P, N) 間の強い相互作用は P の荷電によらないという性質．

ν_μ 間にいわゆる「ニュートリノ振動」が起り得ることを初めて示唆した点で注目に値する．まことに高林（武彦）が指摘したように“坂田は一般に中性粒子に対して鋭い感覚をもっていた”のである[6),*3)]．

(b) 先に述べたように，繰り込み可能性は素粒子模型形成上の要件であるが，そのことを貫徹するには，なお坂田の‘打ち消し法’を必要としているようである．例えば件の要件を損なう，いわゆる「異常項」は，クォークやレプトンからの寄与をすべて考慮すると互いに打ち消し合うことが知られている．もともと朝永の‘繰り込み法’は，坂田の‘打ち消し法’を止揚したものであったが，前者を完結させるのに再び後者を必要としている．何れの方法をより基本的となすべきか．何れにせよ，これもまた歴史の皮肉ではある．

5. おわりに——坂田と湯川・朝永

湯川の武器を哲学，朝永では数学とすれば，坂田の武器は‘言葉’であった．それは屡々，峻厳な批判であり，予言者的な託宣であり，さらには来たるべき理論への萌芽を内包するものであった．

彼の研究経歴は，今日の常識からすれば比較的に短い37年で終った．しかしそこには一本の太い支柱が貫いていた——確固・堅牢な方法である．素粒子論の研究以外にも，パグウォッシュ会議その他の平和運動に献身したが，やはりその根は同じく，科学も，平和も，そして世界も，ともに変革し創造すべきもの，とする信条にあったと思われる．まことに，“あかあかと一本の道とほりたり…(茂吉)”の生き様（よう）であった．

研究スタイルの全く異なる湯川・朝永と同時代を共生したという事実も，今から顧みれば，極めて意義深いことであった．三者の鼎立は理想的な釣り合いを保ち，互いに他のアンチテーゼとしての役割を果たした．ために，わが国の素粒子論は健全な成長を遂げ，とくに戦後期から1950年代にかけては，その黄金時代を招来することとなる．続く世代は筆者をも含め，そこから多くの恩恵を受けた．

かつて湯川は“坂田さんをノーベル賞に推したいが，その時期が難しい”と述べていたのを記憶する．筆者の思うに，その対象となるべき業績は‘二中間子論’ではなかったろうか．第2節でも述べたように，当該問題についての‘最終的な言葉’を述べたのは彼だったからである．そしてその言葉どおりのことが後にパウエルによって実証されたわけであり，1950年度の物理学賞はパウエル単独ではなく，両者の共同受賞でもよかったのでは，と思うのである．結局，坂田の予期せぬ早世（行年59）のため，湯川の望みは果たされなかったが，後年坂田門下生の2人が，別の形でではあるが，それを叶えてくれることとなる．以て瞑すべしと言おうか．

奇しくも本年は坂田生誕百年に当たる．この秋（とき）に偶々ではあろうが本稿の執筆を求められたことに，門下の一人として不思議な因縁を覚える．

執筆に当たり，古い文献や写真の入手にご助力頂いた小林澈郎・西尾成子・小沼通二の三氏に謝意を表したい．

参考文献

1) 坂田方法論については坂田昌一，『物理学と方法』論集1，岩波書店 (1972).
2) V.I. レーニン，『唯物論と経験批判論』(1909) 第5章，第2節.
3) 渡辺慧，「自然」（中央公論社）1949年6月号，p.12.
4) 坂田昌一，『素粒子論の研究 I』p.102，岩波書店 (1949).
5) 大貫義郎，「坂田模型50周年記念国際シンポジウム」2006.11.25–26（於名大）における発言.
6) 高林武彦，「科学」（岩波書店）Vol.**41**，No.2，p.86 (1971).

（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

リレー連載

人物で学ぶ数学

創始者の思考で学ぶ

第6回

コルモゴロフ

ランダム性を扱う数学の創始

杉田　洋

1. はじめに

偶然，デタラメ，予測不可能，ランダム，… これらの言葉で表される現象が，正確無比で厳密な数学—幾何学や代数学の世界—で扱われることが可能になるとは古代の人々には想像もできなかったであろう．それが実現するために人類は20世紀まで待たねばならなかったのである．

ランダム性を扱う数学の建設においてコルモゴロフ（A.N. Kolmogorov, 1903–87）が中心的役割を果たしことは誰しも認めるところだろう．しかし，天才コルモゴロフ一人が何もかも創始したわけではない．ランダム性を扱う数学に必要な数学理論—測度論，関数解析，計算論，情報理論，計算機科学など，それらは一見ランダム性とは何の関係もない—が整えられていく過程において，コルモゴロフの嗅覚が鋭く反応して，ランダム性を扱う数学が生まれたのだ．その意味でコルモゴロフもまた巨人たちの肩の上に立って初めて遠くを見ることができたのであった．

2. 17〜19世紀

ランダム性を数学的に解明しようとするきっかけは，どうも賭け事にあったらしい．中断された賭けにおける賭け金の公平な配分を巡ってパスカル（B. Pascal, 1623–62）とフェルマー（P. Fermat, 1601–65）の間で交わされた書簡が有名である．その後，確率論の最初の教科書を書いたとされるホイヘンス（C. Huygens, 1629–95），大数の弱法則の原型を見出したベルヌーイ（J. Bernoulli, 1654–1705）が続く．

そしてラプラス（P.S. Laplace, 1749–1827）が『確率の解析的理論』を著す．微積分学を確率論の計算に応用する，ということが主眼のこの大著の中で，ラプラスは「すべての事象は偶然に見えることもじつは決定論的であり，ただ人間の無知のためにそう見えるに過ぎない」という見解を述べている．これは後述の確率変数の数学的定義の思想的背景を与えている．

もちろん，ガウス（C.F. Gauss, 1777–1855）の『天体運行論』，『誤差論』も同時期の極めて重要な貢献である．ガウスは天体観測に見られる不可避な誤差を確率変数の見本値として捉えた．その際，正規分布（ガウス分布ともいう）の普遍的な重要性に気付く．彼は最小二乗法をランダムな誤差を含んだ測定値から真値を推定する方法として理論づけた．さらに同時期，ポアソン（S.D. Poisson, 1781–1840）が二項分布のある極限として得られるポアソン分布を見出した．

このように名だたる数学者が多くの貢献をした

にも関わらず，20 世紀に入っても確率論は数学の一分野として認められず，例えば物理学と同じように扱われていた．そのことはヒルベルト（D. Hilbert, 1862–1943）の第 6 問題を見れば分かる．これは第 2 回国際数学者会議（パリ，1900）において彼が提起した 23 の問題のうちの一つであり，物理学を公理論的に構成せよ，という呼び掛けであって，その中に確率論の公理化も含まれていたのである．

3.『確率論の基礎概念』前夜

3.1 フーリエ解析

さて，19 世紀後半の数学界の中心的なテーマの一つはフーリエ解析であった．フーリエ（J. Fourier, 1768–1830）は任意の周期関数が三角級数（フーリエ級数）で表現できるとしたが，多くの曖昧な点を含んでいた．カントール（G. Cantor, 1845–1918）はフーリエ係数の一意性の研究から集合論を創設することになるし，またフーリエ級数が発散する点の集合の研究からルベーグ（H. Lebesgue, 1875–1941）は完全加法的測度に基づく新しい積分論（ルベーグ積分論）を作り上げる（『積分・長さ・面積』，1902）．もちろん，関数解析学の端緒となるヒルベルト空間論もフーリエ級数を起源とする．フーリエ変換はさらに精緻な理論を要求し解析学は成熟した．

じつはコルモゴロフは 19 歳のとき，論文「フーリエ級数がほとんどいたるところ発散する可積分関数の構成」によって初めて世界に認められた．

3.2 正規数定理

1909 年，ボレル（E. Borel, 1871–1956）による正規数定理は厳密な体系で初めて示された「大数の強法則」である．少し詳しく見よう．

一つの硬貨を投げ続ける．第 i 回目の硬貨投げの結果（表 $=1$，裏 $=0$）を X_i で表すことにしよう．このとき，例えば「最初の 3 回が，表，裏，表の順に出る確率は

$$P(X_1=1, X_2=0, X_3=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \tag{1}$$

である」と我が国では高等学校で習うが，そこでは P や X_i の数学的実体は明らかでない．

ボレルは以下のような設定を考えた．各 $x \in [0,1) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 1\}$ に対して $d_i(x) \in \{0,1\}$ を x の 2 進小数展開の第 i 桁の数とする．また，部分区間 $[a,b) \subset [0,1)$ の長さ（ルベーグ測度）を $\mathbb{P}([a,b)) := b-a$ と定義する．このとき $d_1(x), d_2(x), d_3(x)$ がそれぞれ 1, 0, 1 に等しいような $x \in [0,1)$ の集合の長さは

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\{x \in [0,1) \,|\, d_1(x)=1, d_2(x)=0, d_3(x)=1\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{x \in [0,1) \,\middle|\, \frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3} \leqq x < \frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{5}{8},\frac{6}{8}\right)\right) = \frac{1}{8} \end{aligned} \tag{2}$$

であることが分かる．見かけは違うけれども，

$$P \iff \mathbb{P}, \quad X_i \iff d_i$$

の対応の下で (1) と (2) は形式的には同一であることが分かる．公理主義に基づく数学において「形式的に同一」とは「本質的に同一」を意味する．ならば，(1) の P や X_i は (2) の $\mathbb{P}$ や d_i のことであると見なしても差し支えない．ボレルは関数列 $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ の性質として次のことを証明した（正規数定理，2 進の場合）．

$$\mathbb{P}\left(\left\{x \in [0,1) \,\middle|\, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i(x) = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1. \tag{3}$$

これはもちろん，まったく解析学の定理であるが，$\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ を硬貨投げと解釈すれば，これは硬貨投げの表の出る頻度の極限が 1/2 である確率が 1，という大数の強法則を意味する．それまで何やら正体不明のランダム性や偶然を相手にしていた確率論が，まったく正当な数学の一分野としてスタートを切った瞬間であった．なお，式 (3) が意味を持つためには集合

$$\left\{ x \in [0,1) \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(x) = \frac{1}{2} \right\}$$

が可測集合であることが必要であるが，これは

$$\bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N}^{\infty} \left\{ x \in [0,1) \,\middle|\, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{M} \right\}$$

に等しいことから，ボレル集合（その全体を $\mathcal{B}([0,1))$ と書く）であることが分かる．

たかが硬貨投げと侮ってはいけない．実際，シュタインハウス(H. Steinhaus, 1887–1972)は関数列 $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ から可算無限個の任意の独立確率変数列を構成する方法を見出した．ウィナー（N. Wiener, 1894–1964）の定義したブラウン運動は，ランダムなフーリエ級数

$$B_t := \frac{t}{\sqrt{\pi}}\,\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}\,\xi_n, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

ただし $\{\xi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は標準正規分布に従う独立確率変数列，であるが，この $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ をシュタインハウスの方法で $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ から構成すればブラウン運動 $\{B_t\}_{0\leq t\leq\pi}$ をルベーグ測度空間 $([0,1),\mathcal{B}([0,1)),\mathbb{P})$ 上で実現できる．だから，ボレルの仕事は実質的に確率論を数学—幾何学や代数学の世界—に打ち建てたといってよい．

4.『確率論の基礎概念』

4.1 公理化

1933年，ついにコルモゴロフの『確率論の基礎概念』[1)]が世に出る．わずか62ページ，ハードカバーがなかったら長めの論文というほどの書である．その序文でコルモゴロフは「幾何学や代数学のように確率論を公理論的に構成することは必要であり，それは可能である」と宣言する．

確率変数 X は確率空間，すなわち全測度が1の測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，で定義された可測関数として定式化される．関数 X をランダムな変量と考えることの根拠は何か？ それは次の解釈が慣例となっている；チュケ[*1)]が $\omega\in\Omega$ を選び，$X(\omega)$ を計算する．ここに Ω は原因の集合で，一つ一つの原因 $\omega\in\Omega$ に対して結果 $X(\omega)$ が生じると考える．人は無知のためにチュケの意思を知らないし，どの ω が選ばれたのかを知らないし，それどころか，Ω が何物か，すら知らない．それで人には X の値が偶然に定まるように見える．これはラプラスの考え方そのものである．しかしコルモゴロフは確率変数の個々の値 $X(\omega)$ を見ることはせずに，もっぱら X を関数として扱うことを宣言する．そのため，$\omega\in\Omega$ が選ばれる手続きは無視される．ランダム性はその手続きにこそ存在するので，コルモゴロフの確率論はランダム性そのものを見るわけではなく，むしろ，それを避けて確率の計算を可能にする枠組みを与えている．

コルモゴロフの確率論の公理を満たす実体としての例の一つが，ルベーグ測度空間であり，ボレルの考案した硬貨投げ $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ を基にシュタインハウスの方法を用いればブラウン運動ですら，その上で実現できるのであった．非常に専門的な場合（例えば非可算個の独立確率変数を構成するなど）を除けば，ルベーグ測度空間上で確率論を展開することが可能であることが証明できる．ならば，なぜ，抽象化が必要なのか．

普通，数学の理論は，具体的な問題を解くときには抽象的な一般論を特別な具体的な場合に焼き直して議論する．しかし，確率論では，具体的な問題ほど，逆に抽象的な確率空間がよく似合う．なぜなら具体的な確率論的問題をルベーグの測度空間上で展開しようとすると，それは可能だが，とてつもなく複雑な様相を呈してしまうからだ．コルモゴロフのお陰で確率論は極めて機動性に富む数学になったのである．

4.2 拡張定理

『確率論の基礎概念』の中で「基本定理」として登場するのがいわゆるコルモゴロフの拡張定理である．これはこの書の中でも出色の定理なので少し詳しく述べよう．

確率論の主人公は確率変数とその（確率）分布である．確率空間は主人公の舞台に過ぎない．そのため，確率空間は存在するだけでよく，とくに

*1) Tyche, ギリシャ神話の「運」の女神

具体的である必要はないのが普通である．実際問題としては，確率変数が複数個 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$—とくに無限個，非可算個でも—与えられたときに，それら全部に共通の確率空間が存在すると都合がよい．コルモゴロフの拡張定理と呼ばれる定理はそういう確率空間が，確率変数たちの同時分布の族に矛盾がない限りいつでも構成できることを保証する．これは真に驚くべき定理である．

この定理の中でコルモゴロフが構成した確率空間が，また興味深い．もし確率変数の族 $\boldsymbol{X} := \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で実現されるならば，$\boldsymbol{X}$ は $\Omega\to\mathbb{R}^\Lambda$ なる写像となっている．このとき，一般論によって確率測度 P の $\boldsymbol{X}$ による像測度 $\mu := P\circ\boldsymbol{X}^{-1}$ が $\mathbb{R}^\Lambda$ 上に自然に誘導される．これを $\boldsymbol{X}$ の分布と言う．ならば，直接 μ を $\mathbb{R}^\Lambda$ 上に構成して，$\boldsymbol{X}$ を恒等写像 $Id:\mathbb{R}^\Lambda\to\mathbb{R}^\Lambda$ と見なすことができるはずだ．これがコルモゴロフのアイデアであり，定理はその通りに証明される．何が興味深いかというと，$\boldsymbol{X}(\omega)=\omega$ なので，これでは原因 ω と結果 $\boldsymbol{X}(\omega)$ が同じになってしまうことだ．伝統的なラプラスの思想，あるいはチュケのたとえ話はここでは見事に無視されている．そう，数学は解釈よりも形式を重んじ，形式さえ矛盾がなければ何をしても自由なのだ．

結果として各 X_λ は座標 λ への射影（座標関数）$\mathbb{R}^\Lambda\to\mathbb{R}$ となる．このような確率変数族の実現を今日では標準的実現（canonical realization）という．

5. アルゴリズム的情報理論

コルモゴロフの確率論は，ランダム性を扱うことなく確率の計算を行うことで大成功を収めた．しかしながら，後年，彼は「ランダム性とは何か」を深く追求するのである．以下，硬貨投げの場合に詳しく述べる．

例えば次の2つの $\{0,1\}$–列を考えよう．

$$00000000000000000000000\ldots, \tag{4}$$

$$10010110110111100010111\ldots. \tag{5}$$

同じ回数の硬貨投げの結果はどれも同じ確率で出現する．しかし (4) より (5) のほうがランダムに見える．このことをどうやって説明したらよいだろうか．

5.1 フォン・ミーゼスのコレクティーフ

そもそものきっかけはフォン・ミーゼス（R. von Mises, 1883–1953）の議論（1919）である．彼はまず，乱数（彼はコレクティーフと呼んだ）というものの定義が必要であり，しかる後に初めて確率を考え得ると主張した．例えば硬貨投げの場合，表と裏をそれぞれ 1 と 0 で表すことにすれば，乱数においては 1 の出現する頻度は項数を無限にする極限において 1/2 でなければならない，とした．もちろん，これだけだと 01010101... のような列も乱数になってしまうので，もっと条件が必要である．そこでフォン・ミーゼスはその任意の部分列も同じ性質を持つべきだと考えた．しかし，故意に 1 の項ばかり選んで部分列を作ったのでは話にならないので「許容される手順（admssible procedure）」によって選ばれた任意の部分列についてそうであれば乱数である，と考えた．コルモゴロフは「許される手順」を正確に定義するためにチューリング（A. Turing, 1912–54）やクリーネ（S.C. Kleene, 1909–94）の計算理論における帰納的関数の考えを用い，乱数の一つの定義を提案する[2)]．しかし，0, 1 の出現する頻度だけに注目したフォン・ミーゼスの方法は乱数を定義するには十分でないことがその後明らかになる．

5.2 コルモゴロフ複雑度

数年後，コルモゴロフはランダム性を量的に計る方法を発見する[3)]．今日，コルモゴロフ複雑度と呼ばれる関数がそれである．独立にチャイティン（G.J. Chaitin, 1947–）とソロモノフ（R. Solomonov, 1929–2009）もほぼ同時期同じアイデアに達していた．この発見に関しては，シャノン（C. Shannon, 1916–2001）の情報理論が大きく影響している．情報というと普通は伝えられる内容に関心を持つものだが，シャノンは情報の内容ではなくその量に注目した．さらに送信されるメッセージを確率過程と見なすというマルコフ（A.A.

Markov, 1856–1922）の考えを取り入れ，その情報量を硬貨投げの回数に換算して計る，という神業を披露した．

例えば，表の出る確率が $0 < p < 1$ の場合の硬貨投げを n 回行う場合の情報量（エントロピーと呼ばれる）は $n \cdot h(p)$，ただし

$$h(p) := -p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

であることが分かる．$p = 1/2$ のときは n に等しくて，それ以外の場合は n より真に小さい．シャノンの理論によれば，$n \gg 1$ のとき*2)，このことは長さ n の不公平な硬貨投げ $(p \neq 1/2)$ の見本路は極めて高い確率でそれより短い長さ $n \cdot h(p)$ の公平な硬貨投げを用いて実現できることが分かる．

シャノンの理論にヒントを得て，コルモゴロフはエントロピーを n 回の硬貨投げの一つ一つの見本路について考えようとした．コルモゴロフのアイデアは次の通りだ；有限な $\{0,1\}$–列の全体を $\{0,1\}^*$ と表す．関数 $A : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ を一つ固定したときに，もし $x \in \{0,1\}^*$ に対して $p \in \{0,1\}^n$ が存在して $A(p) = x$ となっているなら，x のエントロピーは n 以下である，と考えよう．そこで，

$$K_A(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} |\, \exists p \in \{0,1\}^n,\ A(p) = x\}$$

と定義し，これを関数 A の下での x の複雑度という．ただし右辺の集合が空集合の場合は $K_A(x) := \infty$ とする．コルモゴロフは，この定義における関数 A は p から x を生成する手順を表すもの—数学的には部分帰納的関数という範疇の関数—として，これをアルゴリズムと呼び，そして $A(p) = x$ なる p を x を生成するプログラムと呼んだ．

しかしながら，$K_A(x)$ は x の複雑さを表す量としては不完全である．もちろん，それがアルゴリズム A に依存する量だからだ．そこで複雑度を個々のアルゴリズムによらない普遍的な量として定義できないであろうか．じつは次のようなアルゴリズム A_0 が存在することが証明できるのである；任意のアルゴリズム A に対して，ある $c > 0$ が存在して，任意の x に対して

$$K_{A_0}(x) < K_A(x) + c$$

が成り立つ．このような A_0 を万能アルゴリズムと呼ぶ．万能アルゴリズムは，ソフトウェア次第で様々な計算をすることができる汎用コンピュータの数学モデルである．つまり，c は A_0 によってアルゴリズム A を実現するためのソフトウェアの長さに他ならない．万能アルゴリズムは一意的ではないけれども，もし A_0' も万能アルゴリズムだとしたら，ある $c' > 0$ が存在して，任意の x に対して

$$|K_{A_0}(x) - K_{A_0'}(x)| < c'$$

が成り立つ．だから x の複雑度が定数 c' が無視できるくらい大きい状況においては，$K_{A_0}(x)$ と $K_{A_0'}(x)$ の違いは問題にならない．そこで一つの万能アルゴリズム A_0 を固定して $K_{A_0}(x)$ を単に $K(x)$ と書き，x のコルモゴロフ複雑度と呼ぶ．

上のような経緯があったので，$K(x)$ をコルモゴロフ自身はあくまで x のエントロピーと呼んでいた．コルモゴロフ複雑度から発するランダム性に関する理論をアルゴリズム的情報理論と呼ぶ．

5.3 乱数

コルモゴロフの思惑とは裏腹に現在までアルゴリズム的情報理論は，確率論に比べれば，残念ながら貧弱な内容に留まっている．それでも，コルモゴロフの業績は不滅である．なぜなら，彼は乱数の適切な定義を提示し，ランダム性とは何かを解明したからだ．

恒等写像 $Id : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ の下での $x \in \{0,1\}^n$ の複雑度を考えると，$Id(x) = x$ なのだから明らかに $K_{Id}(x) = n$ である．従って，ある $c > 0$ が存在して

$$K(x) < K_{Id}(x) + c = n + c \tag{6}$$

である．一方，$n > c'$ のとき

$$\#\{x \in \{0,1\} \,|\, K(x) \geq n - c'\} > 2^n - 2^{n-c'} \tag{7}$$

*2)　$a \gg b$ は「a は b よりずっと大きい」の意．

が成り立つ．なぜなら，そもそも長さ $n-c'$ 未満のプログラム p の個数が $2^{n-c'}-1$ を超えないからだ．(6) と (7) より，n が c および c' よりずっと大きいときは，$\{0,1\}^n$ に属する圧倒的多数の元 x について $K(x) \approx n$ であることが分かる．そのような x をコルモゴロフは乱数と呼んだ．

なぜ乱数と呼んだのか，説明しよう．$n \gg 1$ のとき，例えば (4) で挙げた 0 ばかり並んだ $\{0,1\}$–列 $0000\ldots0 \in \{0,1\}^n$ の場合はその長さ n よりもずっと短いプログラムで生成できる．短いプログラムで生成できるような x は何らかの規則性のゆえにそうできる．というか，その短いプログラム自身が x の規則性を表している．一方，$K(x) \approx n$ であることは x を生成するプログラムで Id より短いものがほとんどないことを示している．つまり，x の規則性を見出すことができない．だから乱数なのである．

6. アルゴリズム的情報理論と確率論

コルモゴロフの考えに従えば，ランダム性とは乱数の性質のことである．ところが，じつは個々の乱数はそれが乱数であることすら確かめられない．なぜなら関数 $K(x)$ は帰納的（計算可能）でないからである．それでも乱数の性質を調べることはできる．乱数は長い $\{0,1\}$–列の圧倒的大多数を占める．だから，長い $\{0,1\}$–列の圧倒的大多数が共有している性質を調べればよいのである．それは確率論の様々の極限定理（大数の法則，中心極限定理，重複対数の法則など）が主張している性質に他ならない．極限定理が研究される理由は，それが統計力学や数理統計など応用に役立つから，というだけでなく，じつは極限定理がランダム性そのものの数学的表現形式であるからだ．確率論はもともとランダム性を避けて建設されたものであった．しかし，それは果たせるかな，ランダム性を調べる最強の枠組みを与えていたのである．

こうして見ると，コルモゴロフのランダム性に対する数学的思想が浮かび上がってくる．アルゴリズム的情報理論と確率論は相補的にランダム性を扱う数学の両輪をなしているというのだ．

明らかに，ランダム性を扱う数学はコルモゴロフの出現以降，本質的に変わってしまった．

7. おわりに

コルモゴロフがランダム性と関わった数学は小文で扱ったものだけではない．エルゴード理論，乱流理論もそうである．それらは本来なら省くことはできないのだが小文では触れず，確率論ではほとんど話題に上らないコルモゴロフ複雑度について述べさせて貰った．それは，この概念が（あまり実用的な価値は高くないものの）確率論とともにコルモゴロフが大切にしたランダム性の本質を語るのにどうしても必要だったからである[*3]．

参考文献

1) A.N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1933（コルモゴロフ『確率論の基礎概念』，根本伸司訳，東京図書）．
2) A.N. Kolmogorov, On tables of random numbers, *Sankhyā, Indian J. Statist. Ser. A* **25** (1963) 369–376.
3) A.N. Kolmogorov, Three approaches to the definition of the concept "quantity of information". (Russian) *Problemy Peredači Informacii* **1** (1965) vyp. 1, 3–11.
4) *Kolmogorov in perspective*, History of Mathematics, 20. AMS, Providence, RI; LMSociety, London, 2000. x+230 pp.
5) 数学セミナー「特集コルモゴロフの数学」，2003 年 11 月号，日本評論社．

（すぎた・ひろし，大阪大学大学院理学研究科）

*3) それゆえ，岩波『数学辞典第 3 版』で掲載されていたコルモゴロフ複雑度（同辞典では Kolmogorov-Chaitin の複雑性と書かれている）に関する記事が『第 4 版』では削除されたことを筆者はとても残念に思う．

特　集（2011 年 10 月号予告）		
時空と熱力学	熱力学と重力の意外に深い関係	太田　信義
ブラックホール熱力学の多彩な広がり	ブラックホール熱力学入門	前田　恵一
	D ブレーンとブラックホール熱力学	橋本　幸士
	原子核理論と高次元時空	福嶋　健二
	エンタングルメントとブラックホール熱力学	畔柳　竜生
	物性物理とブラックホール熱力学	高柳　匡
	重力と熱力学	福間　将文
	時空の散逸と熱揺らぎ	磯　暁
	［コラム］	駒宮　幸男
本体 952 円	［コラム］	白水　徹也

特　集（2011 年 8 月号）		
計算が拓く数学と物理の世界	巻頭言	大石　進一
自然を語る数値と計算	数値計算の今昔　1 老兵の回想	山本　哲朗
	力学系の大域的構造に対する計算機援用解析	國府　寛司
	数値計算と計算幾何	尾崎　克久
	流体力学における精度保証付き数値計算	中尾　充宏
	固有値問題における数値計算の発想	杉原　正顯
	数値計算と相対性理論	米田　元
	シュレーディンガー方程式から物性へ	塚田　捷
	［コラム］エラーフリー変換がもたらす数値計算の新たな方向性	荻田　武史
	［インタビュー］多彩に進化した数値計算	大石　進一
	《現象から方程式を創り出す》　第 19 回	高部　英明
	《人物で学ぶ物理》　第 4 回	小嶋　泉
本体 952 円	《連載》　情報幾何の新展開　その 8	甘利　俊一

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

オイラーというのはとても多産な数学者だったようで，オイラーの原論文を閲覧できるウェブサイト The Euler Archive (http://www.math.dartmouth.edu/~euler/) を見てみるとオイラーの凄さがわかるかと思います．

オイラーの業績の中に「ケーニヒスベルクの 7 つの橋」の話がありますが，これについても先のウェブサイトで閲覧することができます．ぜひご覧いただければと思います．

さて，今号をもちまして，全 20 回のリレー連載「現象から方程式を創り出す」が最終回を迎えます．数理科学の中には様々な方程式が存在して，また，各々の方程式の根幹には様々な現象があり，それらが数理科学の問題の出発点になっていることが見えたのではないでしょうか．

数理科学には連載中で取り上げた方程式以外にも重要な方程式がたくさんあります．また，世の中にある現象・問題を調べてみると連載中で取り上げた方程式に行き着く場合があると思います．そのような方程式や現象を探してみるのも面白いかもしれません．　(R)

数　理　科　学　9月号

2011 年 9 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁